Bakhtigareeva Elza Gizarovna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Graduate Student of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: salykai@yandex.ru

Гольдман Михаил Львович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: seulydia@yandex.ru

Goldman Mikhail Lvovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: seulydia@yandex.ru

Забрейко Петр Петрович, Белорусский государственный университет, г. Минск, Белоруссия, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: zabreiko@mail.ru

Zabreyko Pyotr Petrovich, Belarusian State University, Minsk, Belarus, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: zabreiko@mail.ru

УДК 517.9

КВАЗИБЕГУЩИЕ ВОЛНЫ КАК ЕСТЕСТВЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ КЛАССА БЕГУЩИХ ВОЛН

© Л. А. Бекларян

Ключевые слова: бегущие волны; волновое уравнение; функционально-дифференциальное уравнение.

Исследуется вопрос существования решений типа бегущей волны для конечноразностного аналога нелинейного волнового уравнения. В случае неоднородной среды для исчезающих решений типа бегущей волны дается их естественное расширение в виде решений типа квазибегущей волны.

1. Введение

Многие прикладные задачи приводят к изучению решений типа бегущей волны для бесконечномерных динамических систем. В частности, в теории пластической деформации изучается бесконечномерная динамическая система

$$m\ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \phi(y_i), \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где потенциал $\phi(\cdot)$ задается гладкой периодической функцией. Уравнение (1.1) является системой с потенциалом Френкеля Конторовой [1]. Такие системы моделируют поведение счетного числа шаров массы m, помещенных в целочисленных точках числовой прямой, где каждая пара соседних шаров соединена между собой упругой пружиной. Изучение таких систем с различными потенциалами является одним из интенсивно развивающихся направлений в теории динамических систем. Для них центральной задачей является изучение решений типа бегущей волны, как одного из наблюдаемых классов волн.

Система (1.1) является конечноразностным аналогом нелинейного волнового уравнения, описывающего распространение волн в однородном бесконечном стержне.

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем говорить, что решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ системы (1.1), определенное для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет тип бегущей волны, если существует $\tau > 0$, не зависящая от t и i, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$y_i(t+\tau) = y_{i+1}(t). \tag{1.2}$$

Константу τ будем называть *характеристикой* бегущей волны. □

Одним из методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид правой части. На этом пути для системы (1.1) с гладкой периодической функцией $\phi(.)$ были построены специальные классы решений типа бегущей волны. Методами теории возмущений были построены решения типа бегущей волны и для близких потенциалов. Обзор по работам такого направления для бесконечномерных систем с потенциалами Френкеля Конторовой и Ферми Паста Улама приведен в работе [2]. Вместе с тем такой подход не позволяет описать пространство всех решений типа бегущей волны, а также их возможный рост.

Другой подход для конструирования решений основан на использовании различных физических соображений относительно такой системы. На этом пути удается изучить некоторые системы и со специальными типами особенностей для потенциала (доклад Д. Трещева на международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. 2002, Москва).

Ниже предлагается подход, при котором решения типа бегущей волны для системы (1.1) могут быть реализованы как решения однопараметрического семейства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа [3–5]. При этом систему (1.1) с потенциалом без особенностей удается исследовать при более общих предположениях на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде условия Липщица с константой L. В рамках предложенного формализма удается описать решения типа бегущей волны, а также их возможный рост, связанный с характеристикой бегущей волны. Оказывается, что решения типа бегущей волны могут быть реализованы как решения однопараметрического семейства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Стационарные решения исследуются на устойчивость.

Предлагаемый подход позволяет исследовать распространение волн и в случае неоднородного бесконечного стержня, конечноразностный аналог которого описывается системой (1.1) с произвольными массами шаров.

$$m_i\ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \phi(y_i), \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

В [6] показано, что для систем с различными массами шаров не существует решений типа бегущей волны, отличных от стационарных, либо прямолинейных равномерных движений. В связи с этим дается определение квазирешения типа бегущей волны как «правильного» расширения понятия решения типа бегущей волны и совпадающие в случае равных масс. В отличие от решений типа бегущей волны, квазирешения типа бегущей волны могут быть реализованы как решения из более широкого класса импульсных решений однопараметрического семейства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа.

Ниже, будут сформулированы основные результаты и используемые подходы, приведенные в работе [6].

2. Пространства решений

Мы отмечали, что предыдущие авторы при исследовании решений типа бегущей волны использовали конкретный вид потенциала и, соответственно, его разложение. При таком подходе изучаются бесконечно дифференцируемые, либо аналитические решения. В нашем подходе мы будем изучать решения имеющие заданный рост (экспоненциальный) как по времени, так и по пространству.

Для этого определим семейства банаховых пространств функций с весами

$$\mathcal{L}^n_\mu C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(.) : \ x(.) \in C^{(k)}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n\right), \qquad \max_{0\le r\le k} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \qquad \mu \in]0,1[,$$

а также векторное пространство

$$K^n = \prod_{i\in\mathbb{Z}} R^n_i, \qquad R^n_i = \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}$$

$$(\varkappa \in K^n, \qquad \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}).$$

со стандартной топологией полного прямого произведения (метризуемое пространство).

В частности, элементами пространства K^2 будут бесконечные последовательности

$$\varkappa = \{(u_i, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}, \qquad u_i, v_i \in \mathbb{R}$$

(штрих означает транспонирование).

В пространстве K^n определим семейство банаховых подпространств $K^n_{\infty\mu}$, $\mu \in (0,1]$

$$K^n_{\infty\mu} = \{\varkappa : \sup_{i\in Z} \|x_i\|_{R^n}\mu^{|i|} < +\infty\}$$

с нормой

$$\|\varkappa\|_{\infty\mu} = \sup_{i\in Z} \|x_i\|_{R^n}\mu^{|i|},$$

и семейство гильбертовых подпространств $K^n_{2\mu}$, $\mu \in (0,1)$

$$K^n_{2\mu} = \left\{\varkappa : \varkappa \in K^n; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|^2_{R^n}\mu^{2|i|} < +\infty\right\}$$

с нормой

$$\|\varkappa\|_{2\mu} = [\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|^2_{R^n}\mu^{2|i|}]^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь μ это свободный параметр, за счет которого и будет подбираться пространство решений.

Будем полагать, что массы шаров удовлетворяют условию

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}, \qquad \text{т. е.} \quad (\sup_{i\in\mathbb{Z}} \ m_i^{-1} < +\infty).$$

Рассмотрим уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0,1)$

$$C\tau\left[2\mu^{-1}+1\right] = \ln \mu^{-1}, \tag{2.1}$$

где

$$C = \max\{1; \quad [L+2] \sup_{i\in\mathbb{Z}} \ m_i^{-1}\}.$$

Множество решений уравнения (2.1) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, заданными на рис. 1.

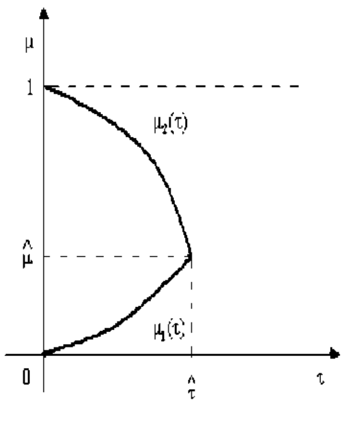

Рис. 1. Графики функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$

Имеет место равенство $\hat\mu = 2C\hat\tau$. Так как $0 < \hat\mu < 1$, то для величины $\hat\tau$ имеется некоторая абсолютная оценка

$$\hat\tau < (2C)^{-1}.$$

3. Решения типа бегущей волны. Случай равных масс

Для случая равных масс сформулируем теорему существования и единственности решения типа бегущей волны.

Т е о р е м а 3.1. *При любых начальных данных* $i \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ *и характеристиках* $\tau > 0$, *удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для исходной системы дифференциальных уравнений (1.1) *существует единственное решение* $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *такое, что оно удовлетворяет начальным условиям* $y_i(t) = a$, $\dot{y}_i(t) = b$, *при любом параметре* $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ *вектор-функция* $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))^T\}_{-\infty}^{+\infty}$ *принадлежит пространству* $K_{2\mu}^2$ *при любом* $t \in \mathbb{R}$, *а функция* $\rho(t) = \|\omega(t)\|_{2\mu}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}_{\sqrt[\tau]{\mu}}^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$. *Такое решение непрерывно зависит от начальных данных* $a, b \in \mathbb{R}$. □

Теорема 3.1 не только гарантирует существование решения, но и задает ограничение его возможного роста как по времени t, так и по координатам $i \in \mathbb{Z}$ (по пространству).

Заметим, что величины $\hat{\tau}$ и $\hat{\mu}$ определяются лишь значениями массы m и константы Липшица L. Так как для любого τ, $0 < \tau < \hat{\tau}$ справедливо включение $\hat{\mu} \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, то на основании теоремы 3.1 мы можем сформулировать одно полезное замечание.

З а м е ч а н и е 3.1. *При любых начальных данных* $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ *и характеристиках* $\tau > 0$, *удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для исходной системы дифференциальных уравнений (1.1) *существует единственное решение* $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *такое, что оно удовлетворяет начальным условиям* $y_{\bar{i}}(t) = a$, $\dot{y}_{\bar{i}}(t) = b$, *вектор-функция* $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))^T\}_{-\infty}^{+\infty}$ *принадлежит пространству* $K_{2\hat{\mu}}^2$ *при любом* $t \in \mathbb{R}$, *а функция* $\rho(t) = \|\omega(t)\|_{2\hat{\mu}}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}_{\sqrt[\tau]{\hat{\mu}}}^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$. *Такое решение непрерывно зависит от начальных данных* $a, b \in \mathbb{R}$. □

Если потенциал $\phi(.)$ тождественно равен нулю, то решения типа бегущей волны, гарантированные в теореме 3.1, задают прямолинейные равномерные движения $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{bt + bi\tau + \alpha\}_{-\infty}^{+\infty}$, $(b \neq 0)$, либо состояние покоя $(b = 0)$. Если потенциал $\phi(.)$ тождественно не равен нулю, то среди решений типа бегущей волны, гарантированных теоремой 3.1, найдется решение с наперед заданной характеристикой τ, $0 < \tau < \hat{\tau}$ и не описывающее прямолинейное равномерное движение $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{bt + bi\tau + \alpha\}_{-\infty}^{+\infty}$ $(b \neq 0)$, либо состояние покоя $(b = 0)$ (существование нетривиальных решений).

Нас интересуют вопросы устойчивости стационарного состояния $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $a_i = a$, $i \in \mathbb{Z}$ типа бегущей волны для системы (6.1). Оно является стационарным тогда и только тогда, когда $\phi(a) = 0$. Изучение устойчивости системы (6.1) в исходном фазовом пространстве K^2 затруднительно, т. к. оно всего лишь метризуемо. Поэтому мы будем рассматривать ее сужение на подпространствах $K_{2\mu}^2$, $\mu \in (0, 1)$ исходного фазового пространства K^2. Заметим, что стационарное состояние типа бегущей волны принадлежит каждому из фазовых подпространств $K_{2\mu}^2$, $\mu \in (0, 1)$ т. к. имеет вид $\{(a, 0)^T\}_{-\infty}^{+\infty}$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Стационарное решение $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty} = \bar{a}$, $a_i = a$, $i \in \mathbb{Z}$ типа бегущей волны для системы (1.1) называется *μ-устойчивым по Ляпунову*, если для любого

$\epsilon > 0$ и любого t_0 найдется такое $\delta > 0$, что для всякого другого решения $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, определенного в окрестности точки t_0 и удовлетворяющего условию $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))^T\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^2$ для любого t из этой окрестности, из неравенства

$$\|\omega(0) - (\vec{a}, 0)'\|_{2\mu} < \epsilon$$

следует, что $\varkappa(\cdot)$ определено при всех $t \geq t_0$ и

$$\|\omega(t) - (\vec{a}, 0)'\|_{2\mu} < \epsilon. \qquad \square$$

Для изучения устойчивости дополнительно будем предполагать, что потенциал $\phi(.)$ дважды непрерывно дифференцируем с равномерно ограниченными производными. Введем обозначение

$$\gamma = |\dot{\phi}(a)|,$$

где $\{a_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $a_i = a$, $i \in \mathbb{Z}$ стационарное состояние типа бегущей волны.

Т е о р е м а 3.2. *Для системы* (1.1) *стационарное решение* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty} = \vec{a}$, $a_i = a$, $i \in \mathbb{Z}$ *типа бегущей волны является* μ*-неустойчивым по Ляпунову для любого* $\mu < (2+\gamma)^{-1}$.
$\square$

4. Решения типа бегущей волны. Случай неравных масс

В случае неравных масс вопрос описания решений типа бегущей волны также важен. Функция $\phi(\cdot)$ также удовлетворяет условию Липшица. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. *Если потенциал* $\phi(\cdot)$ *тождественно равен нулю, то для системы* (1.3) *всякое решение типа бегущей волны с характеристикой* $\tau > 0$ *является стационарным, либо описывает прямолинейное равномерное движение, т.е. все решения типа бегущей волны с характеристикой* $\tau > 0$, *и только они имеют вид* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{(bt + bi\tau + a)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
$\square$

Таким образом, как для равных масс, так и для неравных масс, в случае нулевого потенциала решения типа бегущей волны одни и те же. Они описывают либо прямолинейные равномерные движения, либо стационарные состояния.

Т е о р е м а 4.2. *Если потенциал* $\phi(\cdot)$ *тождественно не равен нулю, то для системы* (1.3) *всякое решение типа бегущей волны является стационарным решением.* $\square$

При ненулевом потенциале, в отличие от случая равных масс, в случае неравных масс нетривиальных решений типа бегущей волны, отличных от стационарных, не существует.

Для изучения устойчивости дополнительно будем предполагать, что потенциал $\phi(.)$ дважды непрерывно дифференцируем с равномерно ограниченными производными. Теперь мы в состоянии сформулировать теорему о неустойчивости стационарного решения дифференциального уравнения (1.3) в случае неравных масс.

Напомним, что $\gamma = |\dot{\phi}(a)|$.

Т е о р е м а 4.3. *Если массы шаров таковы, что*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} m_i^{-1} < +\infty, \qquad \sup_{i \in \mathbb{Z}} m_i < +\infty,$$

то для системы (1.3) *стационарное решение* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty} = \vec{a}$, $a_i = a$, $i \in \mathbb{Z}$ *типа бегущей волны является* μ*-неустойчивым по Ляпунову для любого* $\mu < (2+\gamma)^{-1}$. $\square$

5. Некоторые элементы используемого подхода

Исследование решений типа бегущей волны с заданной характеристикой $\tau > 0$ для системы (6.1) означает изучение решений системы

$$m_i \ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \phi(y_i), \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

$$y_i(t+\tau) = y_{i+1}(t). \tag{5.2}$$

Очевидно, что ограничение на интервал $[0,\tau]$ всякого решения системы (5.1)–(5.2) с нелокальными ограничениями (5.2) является решением краевой задачи

$$m_i \ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \phi(y_i), \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0,\tau] \tag{5.3}$$

$$y_i(\tau) = y_{i+1}(0), \qquad \dot{y}_i(\tau) = \dot{y}_{i+1}(0) \tag{5.4}$$

с нелокальными краевыми условиями (5.4).

В случае *равных масс* верно и обратное: *всякое решение краевой задачи* (5.3)–(5.4), *продолженное в силу дифференциального уравнения* (5.1), *является решением системы* (5.1)–(5.2). Для системы с неравными массами это утверждение является неверным.

С другой стороны, в случае *равных масс* изучение решений краевой задачи (5.3)–(5.4) эквивалентно изучению пространства решений функционально-дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) = m^{-1}[x(t+\tau) - 2x(t) + x(t-\tau) + \phi(x(t))], \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

и соответствующие решения связаны следующим образом: для любого $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = y_{[t\tau^{-1}]}(t - [t\tau^{-1}]),$$

где $[.]$ означает целая часть числа.

Заметим, что в случае *неравных масс* изучение решений краевой задачи (5.3)–(5.4) эквивалентно изучению пространства решений функционально-дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) = [l(t)]^{-1}[x(t+\tau) - 2x(t) + x(t-\tau) + \phi(x(t))], \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5.6}$$

где для любого $i \in \mathbb{R}$ справедливо тождество $l(t) \equiv m_i, \quad t \in [i\tau, (i+1)\tau]$ и они связаны следующим образом: для любого $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = y_{[t\tau^{-1}]}(t - [t\tau^{-1}]),$$

где $[.]$ означает целая часть числа.

Рассмотрим пространство K^2 с элементами $\varkappa = \{(u_i, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ ($'$ означает транспонирование). Определим линейный оператор $\mathbb{A}$, оператор сдвига $\mathbb{T}$ и нелинейный оператор $\mathbb{F}$, действующие непрерывно из пространства K^2 в себя по следующему правилу: для любых $i \in \mathbb{Z}, \quad \varkappa \in K^2$

$$(\mathbb{A}\varkappa)_i = (v_i,\ m^{-1}[u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}])', \qquad (\mathbb{T}\varkappa)_i = (\varkappa)_{i+1}, \qquad (\mathbb{F}(\varkappa))_i = (0, m^{-1}\phi(u_i))'.$$

Заметим, что оператор сдвига $\mathbb{T}$ перестановочен с операторами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{F}$.

Основная система (5.1)–(5.2) может быть переписана в следующей операторной форме

$$\dot{\varkappa} = \mathbb{A}\varkappa + \mathbb{F}(\varkappa), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

$$\varkappa(t+\tau) = \mathbb{T}\varkappa(t). \tag{5.8}$$

Очевидно, что ограничение на интервал $[0,\tau]$ всякого решение системы (5.7)–(5.8) с нелокальными ограничениями (5.8) будет решением краевой задачи

$$\dot{\varkappa} = \mathbb{A}\varkappa + \mathbb{F}(\varkappa), \qquad t \in [0,\tau], \tag{5.9}$$

$$\varkappa(\tau) = \mathbb{T}\varkappa(0) \tag{5.10}$$

с нелокальными краевыми условиями (5.10).

В случае равных масс операторы A и $\mathbb{F}$ коммутируют. В этом и есть отличие от случая неравных масс. Из условия коммутативности операторов A и $\mathbb{F}$ следует, что всякое решение краевой задачи (5.9)–(5.10), продолженное на все $\mathbb{R}$ в силу дифференциального уравнения (5.7), является решением системы (5.7)–(5.8).

6. О правильном расширении понятия бегущей волны

Мы видим, что в случае неравных масс шаров класс решений типа бегущей волны очень узок. Вместе с тем возможны решения которые по своему профилю близки к бегущей волне, к определению которых мы и приступаем. Поэтому следует изучать весь класс решений системы

$$m_i\ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \phi(y_i), \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

$$y_i(t+\tau) = y_{i+1}(t) + q_i(t). \tag{6.2}$$

Очевидно, что ограничение на интервал $[0,\tau]$ всякого решения системы (6.1)–(6.2) с нелокальными ограничениями (6.2) является решением краевой задачи

$$m_i\ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \phi(y_i), \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0,\tau] \tag{6.3}$$

$$y_i(\tau) = y_{i+1}(0) + q_i(0), \qquad \dot{y}_i(\tau) = \dot{y}_{i+1}(0) + \dot{q}_i(0) \tag{6.4}$$

с нелокальными краевыми условиями (6.4).

В свою очередь, изучение решений краевой задачи (6.3)–(6.4) эквивалентно изучению пространства импульсных решений того же функционально-дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) = [l(t)]^{-1}[x(t+\tau) - 2x(t) + x(t-\tau) + \phi(x(t))], \qquad t \in \mathbb{R},$$

где для любого $i \in \mathbb{R}$ $\quad l(t) \equiv m_i, \quad t \in [i\tau,(i+1)\tau]$ и справедливы условия

$$x(i+0) = x(i-0) + q_i, \qquad \dot{x}(i+0) = \dot{x}(i-0) + p_i, \quad (q_i,p_i) = (q_i(0),\dot{q}_i(0)),$$

а соответствующие решения связаны следующим образом: для любого $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = y_{[t\tau^{-1}]}(t - [t\tau^{-1}]),$$

где $[.]$ означает целая часть числа.

Основная система (6.1)–(6.2) может быть переписана в следующей операторной форме

$$\dot{\varkappa} = \mathbb{A}\varkappa + \mathbb{F}(\varkappa), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

$$\varkappa(t+\tau) = \mathbb{T}\varkappa(t) + q(t), \quad q(t) = \{q_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}. \tag{6.6}$$

Очевидно, что ограничение на интервал $[0,\tau]$ всякого решение системы (6.5)–(6.6) с нелокальными ограничениями (5.8) будет решением краевой задачи

$$\dot{\varkappa} = \mathbb{A}\varkappa + \mathbb{F}(\varkappa), \qquad t \in [0,\tau]. \tag{6.7}$$

$$\varkappa(\tau) = \mathbb{T}\varkappa(0) + \overline{\varkappa}, \qquad \overline{\varkappa} = (\{q_i(0)\}_{-\infty}^{+\infty}, \{\dot{q}_i(0)\}_{-\infty}^{+\infty})' \tag{6.8}$$

с нелокальными краевыми условиями (6.8).

Введем обозначения $\bar{q} = \{\bar{q}_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\bar{p} = \{\bar{p}_i\}_{-\infty}^{+\infty}$.

Определение 6.1. Будем говорить, что решение $\{y_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ системы уравнений

$$m_i\ddot{y}_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \phi(y_i), \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

является $(\bar{q}, \bar{p})$*-решением*, если существует $\tau > 0$, не зависящее от $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, что для любых $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$ выполнены условия

$$y_i(\tau) = y_{i+1}(0) + q_i, \qquad \dot{y}_i(\tau) = \dot{y}_{i+1}(0) + p_i, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Константу τ будем называть характеристикой (q, p)-решения. □

Очевидно, что всякое решение типа бегущей волны является (0,0)-решением. В общем случае обратное утверждение неверно. Оно становится верным в случае равных масс.

Сформулируем теорему существования $(\bar{q}, \bar{p})$-решения. Будем полагать, что массы шаров удовлетворяют условию

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1, \qquad \text{то есть} \quad (\sup_{i \in \mathbb{Z}} m_i^{-1} < +\infty).$$

Теорема 6.1. *Для любых начальных данных* $i \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, *начального момента времени* $\bar{t} \in \mathbb{R}$, *характеристик* $\tau > 0$, *удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \dot{\tau}$$

и векторе $(q, p) \in K_{2\mu}^2$, $\mu > \mu_1(\tau)$, *для исходной системы уравнений* (1.3) *существует единственное* (q, p)*-решение с характеристикой* τ *такое, что оно удовлетворяет начальным условиям* $y_i(\bar{t}) = a$, $\dot{y}_i(\bar{t}) = b$, *при любом параметре* $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \bigcap (\mu_1(\tau), \bar{\mu}]$ *векторфункция* $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))^T\}_{-\infty}^{+\infty}$ *принадлежит пространству* $K_{2\mu}^2$ *при любом* $t \in \mathbb{R}$, *а функция* $\rho(t) = \|\omega(t)\|_{2\mu}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}_{\sqrt[\tau]{\mu}}^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$. *Такое решение непрерывно зависит от начальных данных* a, b, *а также от вектора* (q, p) *и массы шаров* $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$. □

Близость массы шаров понимается как близость элементов $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ в пространстве $K_{\infty 1}^1$.

Замечание 6.1. *Из теорем 2.1 и 4.1 следует, что в случае равных масс (0,0)-решение является решением типа бегущей волны, определенной ранее.* □

Очевидно, что для любого $\mu \in (0, 1)$ справедливо вложение

$$\dot{K}_{21}^n \subset K_{2\mu}^n, \qquad \dot{K}_{21}^n = \bigcap_{0<\bar{\mu}<1} K_{2\bar{\mu}}^n.$$

Тогда, из теоремы 4.1 следует, что в случае $(\bar{q}, \bar{p}) \in \dot{K}_{21}^2$ каждая координата $y_i(.)$, $i \in \mathbb{Z}$ решения основного уравнения будет принадлежать пространству $\mathcal{L}_{\sqrt[\tau]{\mu}}^1 C^{(1)}(R)$. Поэтому для таких решений выполняется условие

$$\sup_{t \in R, i \in Z} |y_i(t + \tau) - y_{i+1}(t)|\dot{\mu}^{|\frac{t}{\tau}|}\dot{\mu}^{|i|} < +\infty, \qquad \sup_{t \in R, i \in Z} |\dot{y}_i(t + \tau) - \dot{y}_{i+1}(t)|\dot{\mu}^{|\frac{t}{\tau}|}\dot{\mu}^{|i|} < +\infty.$$

Сформулируем оптимизационную задачу. Пусть массы шаров таковы, что $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$.

Задача А. *Минимизировать функционал*

$$\lambda(i,\bar{t},a,b,\tau;\ \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}) =$$

$$\inf_{\bar{q},\bar{p},\{y_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}} \max\{ \sup_{t\in R,\, i\in Z} |y_i(t+\tau)-y_{i+1}(t)|\hat{\mu}^{|\frac{t}{\tau}|}\hat{\mu}^{|i|}, \quad \sup_{t\in R,\, i\in Z} |\dot{y}_i(t+\tau)-\dot{y}_{i+1}(t)|\hat{\mu}^{|\frac{t}{\tau}|}\hat{\mu}^{|i|}\}$$

при ограничениях :

$$m_i\ddot{y}_i = y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}+\phi(y_i), \qquad i\in\mathbb{Z}, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \qquad \dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b,$$

$$y_i(\tau)=y_{i+1}(0)+q_i, \qquad \dot{y}_i(\tau)=\dot{y}_{i+1}(0)+p_i, \quad i\in\mathbb{Z},$$

$$q = \{q_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad p = \{p_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \qquad (q,p)\in \dot{K}^2_{21},$$

$$y_i(.)\in\mathcal{L}^1_{\sqrt[4]{\mu}}C^{(1)}(\mathbb{R}), \qquad \forall i\in\mathbb{Z}.\square$$

Здесь аргументы $\bar{i},\bar{t},a,b,\tau,\ \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ являются параметрами.

О п р е д е л е н и е 6.2. $(\bar{q},\bar{p})$-решение $\{\hat{y}_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ с характеристикой τ, удовлетворяющее начальным условиям $\hat{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, $\dot{\hat{y}}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$, на котором достигается оптимальное значение задачи A, называется *квазирешением* типа бегущей волны с характеристикой τ. $\square$

Т е о р е м а 6.2. *При любых начальных данных* $\bar{i}\in\mathbb{Z}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $\bar{t}\in\mathbb{R}$, *характеристиках* $\tau>0$, *удовлетворяющих условию*

$$0<\tau<\hat{\tau},$$

и массах шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}\in K^1_{\infty 1}$ *существует квазирешение* $\{\hat{y}_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ, *удовлетворяющее начальным условиям* $\hat{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$, $\dot{\hat{y}}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$. *Для любого значения параметра* $\mu\in(\mu_1(\tau),\mu_2(\tau))$ *вектор-функция* $\omega(t)=\{(y_i(t),\dot{y}_i(t))^T\}_{-\infty}^{+\infty}$ *принадлежит пространству* $K^2_{2\mu}$ *при любом* $t\in\mathbb{R}$, *функция* $\rho(t) = \|\omega(t)\|_{2\mu}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}^1_{\sqrt[4]{\mu}}C^{(1)}(\mathbb{R})$, *а оптимальное значение функционала* $\lambda(\bar{i},\bar{t},a,b,\tau;\ \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty})$, *как функции от начальных данных* a,b *и масс шаров* $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$, *полунепрерывно снизу. Более того, в каждой точке, заданной значениями параметров* a,b, $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ *с равными массами* $m_i = m$, $i\in\mathbb{Z}$ *:*

(1) *квазирешение типа бегущей волны, в действительности являющееся решением типа бегущей волны, непрерывно зависит от начальных данных* a,b, *и массы шаров* $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}\in K^1_{\infty 1}$.

(2) *оптимальное значение функционала* $\lambda(.)$, *как функции от начальных данных* a,b *и масс шаров* $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$, *непрерывно.* $\square$

Близость масс шаров понимается как близость элементов $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ в банаховом пространстве $K^1_{\infty 1}$.

В отличие от теоремы 2.1 о существовании и единственности решения типа бегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ, в теореме 4.2 отсутствует утверждение о единственности квазирешения типа бегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ. Единственность квазирешения типа бегущей волны гарантируется только в случае равных масс $m_i = m$, $i \in \mathbb{Z}$, когда квазирешения типа бегущей волны становятся решениями типа бегущей волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Френкель Я. И., Конторова Т. А.* О теории пластической деформации и двойственности // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. С. 89-97.

2. *Пустыльников Л. Д.* Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // УМН. 1997. Т. 52. Вып. 3 (315). С. 106-158.

3. *Бекларян Л. А.* Групповые особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и связанные с ними метрические инварианты // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 1999. Т. 67. С. 161-182.

4. *Бекларян Л. А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений и их приложения. Групповой подход // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 8. С. 3-147.

5. *Бекларян Л. А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс, 2007. 288 с.

6. *Бекларян Л. А.* О квазибегущих волнах // Математический сборник. 2010. Т. 201. №12. С. 21-68.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00768-а), программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5998.2012.1).

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Beklaryan L.A.

QUASI-TRAVELLING WAVES AS NATURAL EXTENSION OF CLASS OF TRAVELING WAVES

We investigate a problem of the existence of traveling-wave-type solutions for the finite-difference analogue of a nonlinear wave equation. In case of an inhomogeneous medium for vanishing traveling-wave-type solutions a natural extension in the form of quasi-traveling-wave-type solutions is given.

Key words: running waves; wave equation; functional differential equation.

Бекларян Лева Андреевич, Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: beklaryan@mailfrom.ru

Beklaryan Leva Andreevich, Central Economic-Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: beklaryan@mailfrom.ru