

УДК 517.988.6, 517.922

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АВТОРЕГУЛИРУЕМЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

© Е.С. Жуковский, И.И. Пассечников

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с авторегулируемым отклонением аргумента; периодические решения; краевая задача.

Получены условия существования периодических решений дифференциального уравнения с отклонением аргумента, зависящим от значения искомой функции. Такие уравнения описывают некоторые специальные системы управления, а также динамику точек в гравитационных, магнитных, электрических полях. Проблема исследования периодических решений сводится к проблеме разрешимости периодической краевой задачи для соответствующего дифференциального уравнения, которая решается с помощью известных принципов неподвижной точки.

Пусть $T > 0$; $\mathbb{R}^n$ — пространство n -мерных вещественных векторов с нормой $|\cdot|$; L^n — банахово пространство измеримых суммируемых функций $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n} = \int_0^T |x(t)| dt$; AC^n — банахово пространство таких абсолютно непрерывных функций, что $\dot{x} \in L^n$, с нормой $\|x\|_{AC^n} = \|\dot{x}\|_{L^n} + |x(0)|$; C^n — пространство непрерывных функций, $\|x\|_{C^n} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$.

Пусть заданы действительные числа γ_i , функции $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям Каратеодори и являющиеся T -периодическими по первому аргументу. Кроме того, будем предполагать, что для любого $r > 0$ найдется функция $M(\cdot) \in L^n$ такая, что при любом $x \in \mathbb{R}^n$, если $|x| \leq r$, то при почти всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство $|f(t, x)| \leq M(t)$.

Математическое описание движение зарядов в электрическом поле, или материальных точек в гравитационном поле [1] приводит к следующей системе функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) + \gamma_i x_i(t) = f_i\left(t, x_1(h_{i1}(t, x(t))), \dots, x_n(h_{in}(t, x(t)))\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

К системе (1) также сводятся некоторые задачи управления, вследствие чего такие уравнения называют уравнениями с авторегулируемым отклонением аргумента. Задача Коши для системы (1) на конечном промежутке "времени" исследовалась в работах [2-5]. Здесь рассматривается случай $t \in \mathbb{R}$.

Решение системы (1) — это абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая ее уравнениям при почти всех $t \in \mathbb{R}$. В данной статье исследуется проблема существования T -периодического решения системы (1).

Определим, для всех $i, j = \overline{1, n}$, функции $\tilde{h}_{ij}(t, x) = T\{h_{ij}(t, x)T^{-1}\}$, где символом $\{\cdot\}$ обозначена дробная часть числа. Заметим, что $\tilde{h}_{ij}([0, T]) \subset [0, T]$, и для любой T -периодической функции $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено $u(\tilde{h}_{ij}(t, u(t))) = u(h_{ij}(t, u(t)))$.

Задача о существовании у системы (1) T -периодического решения равносильна задаче о разрешимости следующей периодической краевой задачи

$$\dot{x}_i(t) + \gamma_i x_i(t) = f_i\left(t, x_1(\tilde{h}_{i1}(t, x(t))), \dots, x_n(\tilde{h}_{in}(t, x(t)))\right), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$x_i(0) - x_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Для исследования красной задачи (2), (3) воспользуемся W-подстановкой Н.В. Азбелева [6]. Выберем вспомогательную красную задачу

$$\dot{x}_i(t) + \gamma_i x_i(t) = y_i(t), \quad t \in [0, T], \quad x_i(0) - x_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

решение которой определяется формулой

$$x_i(t) = \int_0^T G_i(t, s) y_i(s) ds, \quad G_i(t, s) = \begin{cases} (e^{\gamma_i T} - 1)^{-1} e^{\gamma_i(s-t+T)}, & \text{если } s \leq t, \\ (e^{\gamma_i T} - 1)^{-1} e^{\gamma_i(s-t)}, & \text{если } s > t. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, красная задача (2), (3) равносильна системе уравнений

$$\begin{aligned} y_i(t) = & f_i\left(t, \int_0^T G_1(t, \zeta) y_1(\zeta) d\zeta, s\right) y_1(s) ds, \dots \\ & \dots, \int_0^T G_n(t, \zeta) y_n(\zeta) d\zeta, s\right) y_n(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если y — решение уравнения (5), то после подстановки этой функции в соотношение (4) получаем решение x красной задачи (2), (3), периодическое продолжение которого будет решением исходного уравнения (1).

Для исследования разрешимости системы (5), мы воспользуемся классическим принципом Шаудера неподвижной точки вполне непрерывного отображения [7].

Т е о р е м а. Пусть для всех $i = \overline{1, n}$ выполнены следующие условия: существует такое $\alpha_i > 0$, что при почти всех $t \in [0, T]$ и любом $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $f_i(t, x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является α_i -накрывающим; для любого $j = \overline{1, n}$ существует такое $\beta_{ij} \geq 0$, что при почти всех $t \in [0, T]$ и любом $w \in \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ отображение $f_i(t, x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n, w) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является β_{ij} -лишнеевым. Тогда, если матрица

$$C = \left((\alpha_i \gamma_i)^{-1} \beta_{ij} \right)_{n \times n} \quad (6)$$

имеет спектральный радиус $\rho(C) < 1$, то существует решение $x \in AC_\infty^n$ красной задачи (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на результатах [3].

Определим для любого $i = \overline{1, n}$ отображение $\Phi_i : L_\infty \times L_\infty \rightarrow L_\infty$ соотношением

$$\left(\Phi_i(u_i, v_1, \dots, v_n) \right)(t) = f_i\left(t, \int_0^T G_1(t, \zeta) v_1(\zeta) d\zeta, s\right) v_1(s) ds, \dots, \int_0^T G_n(t, \zeta) v_n(\zeta) d\zeta, s\right) v_n(s) ds, u_i(t).$$

Теперь запишем систему (5) в виде системы операторных уравнений

$$\Phi_i(y_i, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Для исследования полученной системы (7) воспользуемся результатами работы [3].

В силу [3, теорема 3] отображение $\Phi_i(\cdot, v_1, \dots, v_n) : L_\infty \rightarrow L_\infty$ является α_i -накрывающим, $i = \overline{1, n}$. Далее, для произвольного $j = \overline{1, n}$ и любых $v_j, \tilde{v}_j \in L_\infty$ выполнено

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\Phi_i(u_i, v_1, \dots, v_j, \dots, v_n) - \Phi_i(u_i, v_1, \dots, \tilde{v}_j, \dots, v_n) \right) \right\|_{L_\infty} \leq \\ & \leq \beta_{ij} \text{vrai} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^T G_i(t, \zeta) |v_j(\zeta) - \tilde{v}_j(\zeta)| d\zeta \right) \leq \gamma_i^{-1} \beta_{ij} \|v_j - \tilde{v}_j\|_{L_\infty}. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение $\Phi_i(u_i, v_1, \dots, v_{j-1}, \cdot, v_{j+1}, v_n): L_\infty \rightarrow L_\infty$ является липшицевым с константой $\tilde{\beta}_{ij} \cdot \gamma_i^{-1} \beta_{ij}$.

Согласно [3, теорема 1], для доказательства утверждения остается заметить, что матрица $((\alpha_i \gamma_i)^{-1} \tilde{\beta}_{ij})_{n \times n}$ – это матрица C , которая определяется равенством (6), и ее спектральный радиус $\rho(C) < 1$.

С л е д с т в и е. При выполнении условий доказанной теоремы уравнение (1) имеет T -периодическое решение.

В заключение отметим, что идеи применения покрывающих отображений к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений и условия разрешимости и корректности задачи Коши были предложены в работах [4]–[8], результаты о разрешимости априорных краевых задач для таких уравнений получены в [3], [9], [10], периодическая краевая задача исследовалась в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллин Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Арутюнов А.В. Покрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. №2. С. 151–155.
3. Жуковский Е.С., Паузенникова Е.А. Покрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–456.
4. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Покрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
5. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
6. Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra gathers // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 75. 2012. P. 1026–1044.
7. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. V. 90. No. 6. P. 889–898.
8. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.
9. Жуковский Е.С., Паузенникова Е.А. Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.
10. Жуковский Е.С., Паузенникова Е.А. Покрывающие отображения в проблеме корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1082–1085.
11. Жуковский Е.С., Паузенникова Е.А. О периодической краевой задаче для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2012. Вып. 1 (39). С. 52–53.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Zhukovskiy E.S., Pasechnikov I.I.

ON PERIODIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AUTOCONTROLLABLE ARGUMENT DEVIATION

The existence conditions for periodic solutions of a differential equation with argument deviation depending on the value of the required function are derived. Equations as such describe some special control systems as well as the dynamics of mass points in gravitational, magnetic, and electric fields. The problem of studying periodic solutions is reduced to the problem of solvability of the periodic boundary-value problem for the corresponding differential equation which can be resolved by means of the known fixed point principles.

Key words: differential equation with autocontrollable argument deviation; periodic solutions; boundary-value problem.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии, e-mail: zukovskys@mail.ru

Zhukovsky Evgeny Semenovitch, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Algebra and Geometry Department, e-mail: zukovskys@mail.ru

Пасечников Иван Иванович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры общей физики, e-mail: pasednikov_ivan@mail.ru

Pasechnikov Ivan Ivanovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technical, Professor of General Physics Department, e-mail: pasechnikov_ivan@mail.ru