

УДК 51

О КОРРЕКТНОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ ОБЩЕГО ВИДА

© Д.Ю. Карамзин

Ключевые слова: импульсные управления; импульсные системы; корректность решения. Изучается свойство корректности решений импульсной системы, полученной в результате импульсного расширения обыкновенной системы дифференциальных уравнений. Доказываются необходимые технические леммы.

Будем изучать следующую управляемую дифференциальную систему

$$dx = f(x, u, t)dt + g(x, u, t)d\nu, \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

включающую обычное измеримое существенно ограниченное управление u и импульсное управление $\nu = (\mu, \{u_\tau, v_\tau\})$. Определение импульсного управления и решения импульсной системы (3.1) было дано в работе [?]. Ниже установим корректность решения этой системы относительно специального вида метрики, возникающей при импульсном расширении.

Ниже приведем вспомогательные технические конструкции необходимые для формулировки и доказательства основного результата. Рассмотрим множество всех управлений, т. е. все пары $\varphi = (u, \nu)$. Обозначим это множество через $\mathcal{P}$.

Зафиксируем пару $\varphi = (u, \nu)$, где $\nu = (\mu, \{u_\tau, v_\tau\})$. Рассмотрим функцию $\pi : T \rightarrow [0, 1]$,

$$\pi(t) = \frac{t - t_0 + \nu([t_0, t])}{c}, \quad t \in (t_0, t_1], \quad \pi(t_0) = 0, \quad (3.2)$$

где $\nu = |\nu|$, $c = t_1 - t_0 + \nu(T)$, называемую *разрывной заменой времени Лебега*. Существует обратная функция $\theta(s) : [0, 1] \rightarrow T$ такая, что:

- а) $\theta(s)$ монотонно неубывающая функция на отрезке $[0, 1]$;
- б) $\theta(s)$ абсолютно непрерывна и $|\theta(s) - \theta(t)| \leq c|s - t| \quad \forall s, t$;
- в) $\theta(s) = \tau$, $\forall s \in \Gamma_\tau$, $\forall \tau \in T$, где $\Gamma_\tau = [\pi(\tau^-), \pi(\tau^+)]$.

Заметим что функция $\pi(t)$ отображает $(\ell + |\nu|)$ -измеримые множества в ℓ -измеримые множества. Действительно, это непосредственно вытекает из определения π и из представления множества как объединения борелевского и множества нулевой меры. Поэтому, если множество A является $(\ell + |\nu|)$ -измеримым, то $\theta^{-1}(A)$ измеримо. Это означает измеримость функции $u(\theta(s))$, если только $u(t)$ будет $(\ell + |\nu|)$ измерима. Так что теперь, например, следующая замена подынтегральной переменной оказывается возможной:

$$\int_{t_0}^{t_1} |u(t)|d\mu = c \int_0^1 |u(\theta(s))|m(\theta(s))ds,$$

где m — производная Радона-Никодима меры μ по $\ell + |\nu|$.

Пусть ϕ будет любая непрерывная функция переменных (x, u, t) , принимающая значения в $\mathbb{R}^l$. Введем отображение

$$\text{Ext}[\phi, \nu](s) = \begin{cases} \phi(x_\tau(\xi_\tau(s)), u_\tau(\xi_\tau(s)), \tau) & \text{если } \exists \tau \in \text{Ds}(|\nu|) : s \in \Gamma_\tau, \\ \phi(x(\theta(s)), u(\theta(s)), \theta(s)) & \text{иначе,} \end{cases}$$

действующее из отрезка $[0, 1]$ в $\mathbb{R}^l$. Здесь

$$\xi_\tau(s) = (s - \pi(\tau^-)) / \ell(\Gamma_\tau) : \Gamma_\tau \rightarrow [0, 1].$$

Снабдим сейчас множество $\mathcal{P}$ метрикой. Рассмотрим функцию распределения $F(t, \nu)$ скалярной борелевской меры ν , т. е. $F(t, \nu) = \nu([t_0, t]) \quad \forall t \in (t_0, t_1]$, $F(t_0, \nu) = 0$. Рассмотрим два элемента $\wp_1, \wp_2 \in \mathcal{P}$, и пусть $\wp_1 = (u_1, \vartheta_1)$, $\wp_2 = (u_2, \vartheta_2)$. Пусть ζ_j есть решения систем простейшего вида $d\zeta_j = d\vartheta_j$, $\zeta_j(t_0) = 0$, $j = 1, 2$, построенных согласно определению решения. Расстояние в $\mathcal{P}$ определим по формуле:

$$\begin{aligned} \rho(\wp_1, \wp_2) &= \left| \nu_1(T) - \nu_2(T) \right| + \int_{t_0}^{t_1} \left| F(t, \nu_1) - F(t, \nu_2) \right| dt + \\ &+ \max_{s \in [0, 1]} \left| \text{Ext}[\zeta_1(\cdot), \vartheta_1](s) - \text{Ext}[\zeta_2(\cdot), \vartheta_2](s) \right| + \\ &+ \int_0^1 \left| \text{Ext}[u_1(\cdot), \vartheta_1](s) - \text{Ext}[u_2(\cdot), \vartheta_2](s) \right| ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функции $\text{Ext}[\zeta_j(\cdot), \vartheta_j]$ непрерывны. Функции $\text{Ext}[u_j(\cdot), \vartheta_j]$ измеримы и существенно ограничены, как уже было отмечено выше. Поэтому и максимум, и интеграл в (3.3) определены корректно. Легко проверяется, что функция $\rho(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики. Таким образом, $\mathcal{P}$ – это метрическое пространство. Пространство $\mathcal{P}$, очевидно, полным не является. (Но если управления u берутся из $L_1(T)$, то оно будет полным). Обозначим $\xrightarrow{\rho}$ сходимость элементов в $\mathcal{P}$. Заметим, что любой элемент (u, v) , где $v(t) \in K$, может быть рассмотрен как элемент (u, ϑ) пространства $\mathcal{P}$, если положить $\vartheta = (\mu; \{0\})$, где $d\mu = v(t)dt$.

Целью рассмотрения именно такой метрики служат следующие два свойства управлений из $\mathcal{P}$.

- (А) Множество обычных ограниченных управлений (u, v) является всюду плотным в $\mathcal{P}$.
- (Б) Предельные переходы относительно метрики ρ в системах вида (3.1) оказываются корректными.

В то время как свойство (А) является достаточно очевидным (оно доказывается простым построением нужной последовательности обычных управлений (u_i, v_i) , мы опускаем детали), то свойство (Б) требует более аккуратной формулировки и доказательства. Сформулируем это свойство в виде следующей леммы (Корректность решения).

Л е м м а 1. Пусть $(u_i, \vartheta_i) \xrightarrow{\rho} (u, \vartheta)$, где пары (u_i, ϑ_i) , (u, ϑ) принадлежат $\mathcal{P}$. Предположим, что $x_{0,i} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^n$ и функции $\text{Ext}[u_i, \vartheta_i](s)$ равномерно существенно ограничены. Предположим, что траектория $x_i(\cdot)$ – решение (3.1), отвечающее управлению (u_i, ϑ_i) и начальному значению $x_{0,i}$ существует на всем отрезке $T \quad \forall i$, и $|\text{Ext}[x_i, \vartheta_i](s)| \leq \text{const} \quad \forall s \in [0, 1], \quad \forall i$.

Тогда на всем отрезке T существует и решение $x(\cdot)$ уравнения (3.1), отвечающее управлению (u, ϑ) и начальному значению x_0 , и более того, $\text{Ext}[x_i, \vartheta_i](s) \Rightarrow \text{Ext}[x, \vartheta](s)$ равномерно по $s \in [0, 1]$, что также влечет, что $x_i(t) \rightarrow x(t) \quad \forall t \in (T \setminus \text{Ds}(|\vartheta|)) \cup \{t_0, t_1\}$.

Доказательство основано на разрывной замене времени. Не ограничивая общности, можно предположить, что $f(\cdot, t) = 0 \quad \forall t \in D$, где D – произвольное множество точек меры нуль, которое сингулярная компонента меры $|\vartheta|$ переводит во множество полной лебеговой меры. Поскольку $\ell(D) = 0$, то значения функции f на этом множестве не участвуют в построении траектории. Аналогично поступим со значениями f и в случае мер $|\vartheta_i|$, $i = 1, 2, \dots$. Теперь $f(\cdot, t)$ измерима относительно мер $\ell \ll |\vartheta|$ и $|\vartheta_i| \quad \forall i$. Будем использовать это ниже.

Рассмотрим разрывную замену времени $\pi(t)$, см. (3.2), связанную с импульсным управлением ϑ . Обозначим обратную функцию $\theta(s) : [0, 1] \rightarrow T$. Рассмотрим функцию

$$m_1(t) = c \cdot \frac{d\ell}{d(\ell + |\vartheta|)}, \quad c = t_1 - t_0 + |\vartheta|(T),$$

которая есть умноженная на константу производная Радона-Никодима меры ℓ по мере Лебега-Стилтьеса $\ell + |\vartheta|$. Функция $m_1(t)$ является $(\ell + |\vartheta|)$ -измеримой.

Из определения вытекает формула для $\theta(s)$:

$$\theta(s) = t_0 + \int_0^s \alpha(\zeta) d\zeta, \quad (3.4)$$

где

$$\alpha(\zeta) = \begin{cases} m_1(\theta(\zeta)) & \text{if } \zeta \notin \bigcup_{\tau \in \text{Ds}(|\vartheta|)} \Gamma_\tau, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В самом деле, если мера $|\vartheta|$ не имеет атомов, то формула (3.4) очевидна, т. к.:

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t d\zeta = \int_{t_0}^t m_1(\zeta) d\pi(\tau) = \int_0^{\pi(t)} m_1(\theta(\zeta)) d\zeta.$$

Когда $|\vartheta|$ имеет конечное число атомов $\tau_1, \dots, \tau_N$, то формула (3.4) получается последовательным применением непрерывных замен переменной на отрезках $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Наконец, для произвольной меры $|\vartheta|$ формула (3.4) верна, т. к. меру $|\vartheta|$ можно приблизить мерой с конечным числом атомов.

Обозначим

$$m_2(t) = c \cdot \frac{d\mu_c}{d(\ell + |\vartheta|)}$$

умноженную на константу производную Радона-Никодима меры μ_c по мере $\ell + |\vartheta|$. Функция $m_2(t)$ $(\ell + |\vartheta|)$ -измерима и существенно ограничена.

Определим функцию

$$\beta(\zeta) = \begin{cases} c \cdot (\ell(\Gamma_\tau))^{-1} v_\tau(\xi_\tau(\zeta)) & \text{если } \exists \tau \in \text{Ds}(|\vartheta|) : \zeta \in \Gamma_\tau, \\ m_2(\theta(\zeta)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Не сложно проверить, что

$$\text{Ext}[\zeta, \vartheta](s) = \int_0^s \beta(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } d\zeta = d\vartheta, \quad \zeta(t_0) = 0.$$

Рассматривая в приведенных выше формулах управление (u_i, ϑ_i) вместо (u, ϑ) , для каждого i получим функции α_i , β_i и также аналогичные формулы для θ_i и $\text{Ext}[\zeta_i, \vartheta_i]$, где θ_i есть обратная функция к разрывной замене времени, связанной с импульсным управлением ϑ_i .

Обозначим $y_i : \text{Ext}[x_i, \vartheta_i]$. По определению, в силу замены переменной имеем

$$\begin{aligned} y_i(s) &= x_{0,i} + \int_0^s f(y_i(\zeta), \text{Ext}[u_i, \vartheta_i](\zeta), \theta_i(\zeta)) \alpha_i(\zeta) d\zeta + \\ &+ \int_0^s g(y_i(\zeta), \text{Ext}[u_i, \vartheta_i](\zeta), \theta_i(\zeta)) \beta_i(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Извлекая подпоследовательность и используя определение (3.3) метрики ρ , из сходимости элементов $(u_i, \vartheta_i) \xrightarrow{\rho} (u, \vartheta)$ выводим, что $\theta_i \Rightarrow \theta$, $\text{Ext}[\zeta_i, \vartheta_i] \Rightarrow \text{Ext}[\zeta, \vartheta]$ и $\text{Ext}[u_i, \vartheta_i](s) \rightarrow \text{Ext}[u, \vartheta](s)$, п.в. $s \in [0, 1]$, а также что функции α_i, β_i равномерно ограничены. Снова переходя к подпоследовательности, используя слабую секвенциальную компактность единичного шара в $\mathbb{L}_2$, получаем, что $\alpha_i \rightharpoonup \alpha$, и $\beta_i \rightharpoonup \beta$. После перехода к пределу в формулах

$$\theta_i(s) = t_0 + \int_0^s \alpha_i(\zeta) d\zeta, \quad \text{Ext}[\zeta_i, \vartheta_i](s) = \int_0^s \beta_i(\zeta) d\zeta$$

приходим к тому, что $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$.

Функции y_i , в силу (3.5), равномерно непрерывны и равномерно ограничены. Переходя к подпоследовательности, используя теорему Арцеля, получим $y_i \Rightarrow y$. Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, в (3.5) будем иметь

$$y(s) = x_0 + \int_0^s f(y(\zeta), \text{Ext}[u, \vartheta](\zeta), \theta(\zeta)) \alpha(\zeta) d\zeta + \\ + \int_0^s g(y(\zeta), \text{Ext}[u, \vartheta](\zeta), \theta(\zeta)) \beta(\zeta) d\zeta.$$

По тогда в силу замены переменной траектория $x(t) = y(\pi(t))$, где π — обратная функция к θ , удовлетворяет (3.1). Значит, $y = \text{Ext}[x, \vartheta]$. Поскольку приведенные рассуждения справедливы для любой подпоследовательности исходной последовательности функций $y_i(s)$, то в силу теоремы единственности решения дифференциального уравнения мы доказали, что $\text{Ext}[x_i, \vartheta_i] \Rightarrow \text{Ext}[x, \vartheta]$. Лемма доказана. $\square$

Следующая лемма показывает, как с помощью интегрального функционала возможно аппроксимировать импульсные управления.

Л е м м а 2.

Пусть $(\bar{u}_i, \bar{v}_i) \xrightarrow{\rho} (\bar{u}, \bar{v})$, и

$$\int_{t_0}^{t_1} (|y_i(t) - y_i(t)|^2 + |u_i(t) - u_i(t)|^2) m_i(t) dt \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

где

$$y_i(t) = \int_{t_0}^t (v_i, |v_i|) d\tau, \quad y_i(t) = \int_{t_0}^t (v_i, |v_i|) d\tau, \\ m_i(t) = 1 + \frac{|v_i(t)| + |\bar{v}_i(t)|}{2},$$

функции u_i , u_i , v_i , и v_i класса $\mathbb{L}_\infty(T)$, а функции u_i равномерно ограничены. Тогда, $(u_i, v_i) \xrightarrow{\rho} (u, \vartheta)$.

Доказательство. Рассмотрим разные замены переменных

$$\pi_i(t) = (c_i)^{-1} \left(t - t_0 + \int_{t_0}^t |v_i(\zeta)| d\zeta \right), \\ \bar{\pi}_i(t) = (\bar{c}_i)^{-1} \left(t - t_0 + \int_{t_0}^t |\bar{v}_i(\zeta)| d\zeta \right),$$

где $c_i = t_1 - t_0 + \|v_i\|_{L_1}$, $\bar{c}_i = t_1 - t_0 + \|\bar{v}_i\|_{L_1}$. Обозначим $\theta_i(s)$, $\bar{\theta}_i(s)$ соответствующие обратные функции.

Рассмотрим также следующую замену переменных

$$\pi_i^*(t) = (c_i^*)^{-1} \int_{t_0}^t m_i(\zeta) d\zeta,$$

где $c_i^* = \|m_i\|_{L_1}$, и пусть θ_i^* – соответствующая обратная функция. Пусть ζ обозначает первые k координат вектора y , а z его последнюю координату, т. е. $y = (\zeta, z)$, где z – скаляр. Аналогично $y_i = (\zeta_i, z_i)$ и $y_i = (\zeta_i, z_i)$.

Из (3.6) следует, что $z_i(t) \rightarrow z(t) = F(t, |v|)$ п.в. $t \in T$. Установим, что $z_i(t_1) \rightarrow z(t_1)$ (что означает слабую-* сходимости мер-вариаций).

Из (3.6) имеем

$$\int_0^1 \left(|\zeta_i(\theta_i^*(s)) - \zeta_i(\theta_i^*(s))|^2 + |z_i(\theta_i^*(s)) - z_i(\theta_i^*(s))|^2 \right) ds \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_i(\theta_i^*(s)) &= \int_{t_0}^{\theta_i^*(s)} v_i(t) dt = \int_{t_0}^{\theta_i^*(s)} \frac{2c_i^* v_i(t) d\pi_i^*(t)}{2 + |v_i(t)| + |\bar{v}_i(t)|} = \int_0^s \beta_i(\zeta) d\zeta, \\ \beta_i(\zeta) &= \frac{2c_i^* v_i(\theta_i^*(\zeta))}{2 + |v_i(\theta_i^*(\zeta))| + |\bar{v}_i(\theta_i^*(\zeta))|}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$z_i(\theta_i^*(s)) = \int_0^s |\beta_i(\zeta)| d\zeta.$$

Отметим, что $|\beta_i(\zeta)| \leq 2c_i^*$, и следовательно, ввиду приведенных выше формул, семейства функций $\zeta_i(\theta_i^*(s)), z_i(\theta_i^*(s))$ равномерно непрерывны и равномерно ограничены. Тогда по теореме Арцеля, переходя к подпоследовательности, имеем $\zeta_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows \zeta(s)$, $z_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows z(s)$, где ζ, z есть некоторые непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$. Точно такие же рассуждения справедливы и для функций $\bar{\zeta}_i(\theta_i^*(s))$ и $\bar{z}_i(\theta_i^*(s))$. Из (3.7), переходя к подпоследовательности, имеем $\bar{\zeta}_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows \bar{\zeta}(s)$, $\bar{z}_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows \bar{z}(s)$. По $\bar{z}_i(\theta_i^*(1)) \rightarrow \bar{z}(t_1)$ при $i \rightarrow \infty$ ввиду ρ -сходимости. Отсюда $z_i(t_1) = z_i(\theta_i^*(1)) \rightarrow \bar{z}(t_1)$. Поскольку эти рассуждения справедливы для любой подпоследовательности исходной последовательности, то мы доказали, что $z_i(t_1) \rightarrow z(t_1)$.

В силу слабой-* сходимости мер-вариаций очевидно верно $\theta_i(s) \rightrightarrows \theta(s)$, $\theta_i(s) \rightrightarrows \theta(s)$, $\theta_i^*(s) \rightrightarrows \theta(s)$, где $\theta(s)$ есть обратная функция к

$$\pi(t) = \frac{t - t_0 + z(t)}{t_1 - t_0 + z(t_1)}.$$

По определению метрики ρ , поскольку $(u_i, v_i) \xrightarrow{\rho} (u, v)$, имеем, что $\text{Ext}[\zeta_i, v_i](s) \rightrightarrows \zeta^{\text{ext}}(s) = \text{Ext}[\bar{\zeta}, \bar{v}](s)$. Это означает, что $\bar{\zeta}_i(\theta_i(s)) \rightrightarrows \bar{\zeta}^{\text{ext}}(s)$. Покажем, что $\zeta_i(\theta_i(s)) \rightrightarrows \bar{\zeta}^{\text{ext}}(s)$. Для этого достаточно показать, что существует подпоследовательность, обладающая таким свойством. По определению имеем

$$\frac{\pi_i(\theta_i^*(s)) + \bar{\pi}_i(\theta_i^*(s))}{2} = \pi_i^*(\theta_i^*(s)) = s.$$

Поэтому, учитывая, что $z_i(\theta_i^*(s)) - z_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows 0$, по определению $\pi_i, \bar{\pi}_i$ следует, что $\pi_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows s$, $\bar{\pi}_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows s$.

Заметим, что

$$\zeta_i(\theta_i^*(s)) = \int_0^{\pi_i(\theta_i^*(s))} \frac{c_i v_i(\theta_i(\zeta))}{1 + |v_i(\theta_i(\zeta))|} d\zeta = \text{Ext}[\zeta_i, v_i](\pi_i(\theta_i^*(s))).$$

Отсюда получаем $\text{Ext}[\zeta_i, v_i](s) \rightrightarrows \zeta(s)$, потому что $\zeta_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows \zeta(s)$ и $\pi_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows s$.

Аналогично

$$\zeta_i(\theta_i^*(s)) = \int_0^{\pi_i(\theta_i^*(s))} \frac{\bar{c}_i \bar{v}_i(\bar{\theta}_i(\zeta))}{1 + |v_i(\theta_i(\zeta))|} d\zeta = \text{Ext}[\zeta_i, v_i](\pi_i(\theta_i^*(s))).$$

Как отмечалось выше, $\bar{\zeta}_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows \zeta(s)$. Однако $\text{Ext}[\bar{\zeta}_i, \bar{v}_i](s) \rightrightarrows \bar{\zeta}^{\text{ext}}(s)$, и поэтому, и поскольку $\pi_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows s$, приходим к тождеству $\zeta(s) \equiv \zeta^{\text{ext}}(s)$. Значит,

$$\zeta_i(\theta_i(s)) \rightrightarrows \zeta^{\text{ext}}(s) \Rightarrow \text{Ext}[\zeta_i, v_i](s) \rightrightarrows \zeta^{\text{ext}}(s).$$

Чтобы доказать, что $(u_i, v_i) \xrightarrow{\rho} (\bar{u}, \bar{v})$, остается показать, что имеет место сходимость

$$\text{Ext}[u_i, v_i](s) \rightarrow u^{\text{ext}}(s) = \text{Ext}[u, v](s)$$

в $\mathbb{L}_1^m([0, 1])$. Из (3.6) имеем

$$\int_0^1 |u_i(\theta_i^*(s)) - u_i(\theta_i^*(s))| ds \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

В силу ρ -сходимости имеем $\bar{u}_i(\bar{\theta}_i(s)) \rightarrow \bar{u}^{\text{ext}}(s)$ в $\mathbb{L}_1^m([0, 1])$. Обозначим $f_i(s) = \bar{u}_i(\bar{\theta}_i(s)) - \bar{u}^{\text{ext}}(s)$, $\kappa_i(s) = \bar{\pi}_i(\theta_i^*(s))$. Заметим, что функции $f_i(s)$ равномерно ограничены в $\mathbb{L}_\infty^m([0, 1])$. Поэтому, согласно уже сделанным выкладкам, несложно показать, что

$$\int_0^s \frac{1}{\kappa_i'(s)} ds \leq \text{const} \quad \forall i.$$

Функция $\kappa_i(s)$ отображает отрезок $[0, 1]$ в себя и строго возрастает. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |f_i(\kappa_i(s))| ds = \int_0^1 |f_i(\kappa_i(s))| \frac{\sqrt{\kappa_i'(s)}}{\sqrt{\kappa_i'(s)}} ds \leq \\ & \leq \sqrt{\int_0^1 |f_i(\kappa_i(s))|^2 \kappa_i'(s) ds} \cdot \sqrt{\int_0^1 \frac{1}{\kappa_i'(s)} ds} \leq \\ & \leq \text{const} \sqrt{\int_0^1 |f_i(\zeta)|^2 d\zeta} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши. Тем самым установлено, что

$$\int_0^1 |u_i(\theta_i^*(s)) - u^{\text{ext}}(\kappa_i(s))| ds \rightarrow 0.$$

Поскольку функция $u^{\text{ext}}(s)$ непрерывна в среднем, а $\kappa_i(s) \rightrightarrows s$, получаем, что $u^{\text{ext}}(\kappa_i(s)) \rightarrow u^{\text{ext}}(s)$ в $\mathbb{L}_1^m([0, 1])$. Таким образом, доказано, что $u_i(\theta_i^*(s)) \rightarrow u^{\text{ext}}(s)$ в $\mathbb{L}_1^m([0, 1])$. Следовательно, из (3.8), имеем $u_i(\theta_i^*(s)) \rightarrow u^{\text{ext}}(s)$ в $\mathbb{L}_1^m([0, 1])$. Похоже, но рассматривая функции $f_i(s) = u_i(\theta_i^*(s)) - u^{\text{ext}}(s)$, $\kappa_i(s) = \pi_i^*(\theta_i(s))$, окончательно установим, что $u_i(\theta_i(s)) \rightarrow u^{\text{ext}}(s)$ в $\mathbb{L}_1^m([0, 1])$. Для чего надо только лишь проверить, если $\pi_i^*(\theta_i(s)) \rightrightarrows s$.

Ясно, что $\bar{z}_i(\theta_i(\pi_i(\theta_i^*(s)))) = \bar{z}_i(\bar{\theta}_i(\bar{\pi}_i(\theta_i^*(s))))$. Но по определению $\bar{z}_i(\bar{\theta}_i(s)) \rightrightarrows \bar{c}_i s - \bar{\theta}(s) + t_0$ (потому что $c_i \pi_i(t) = t - t_0 + z_i(t)$). Поэтому, и т. к. $\pi_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows s$, $\pi_i(\theta_i^*(s)) \rightrightarrows s$ приходим к тому выводу, что $z_i(\theta_i(s)) \rightrightarrows c_i s - \theta(s) + t_0$. Тогда по определению имеем

$$\pi_i^*(\theta_i(s)) = \frac{\pi_i(\theta_i(s)) + \pi_i(\theta_i(s))}{2} = \frac{s + \pi_i(\theta_i(s))}{2}$$

$$= \frac{\bar{c}_i s + \theta_i(s) - l_0 + \bar{z}_i(\theta_i(s))}{2c_i} \Rightarrow s.$$

Доказательство завершено. $\square$

З а м е ч а н и е 1. *Попутно мы доказали, что $\theta_i^* \Rightarrow \theta$, $\zeta_i \circ \theta_i^* \Rightarrow \zeta^{\text{ext}}$, $u_i \circ \theta_i^* \rightarrow u^{\text{ext}}$ в $L_1^m([0, 1])$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Pereira P.L. Generalization of the Impulsive Control Concept: Controlling Systems Jumps // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2011. V. 29. № 2. P. 403-415.
2. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00494а).

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

D.Yu. Karamzin

ON WELLPOSEDNESS OF PASSAGE TO THE LIMIT IN IMPULSE SYSTEMS OF GENERAL TYPE

The property of wellposedness of solutions to impulse system obtained as the result of impulsive extension of an ordinary system of differential equations is under discussion. The necessary technical lemmas are proved.

Key words: impulse control; impulse systems; solution's wellposedness.

Карамзин Дмитрий Юрьевич, Вычислительный центр РАН, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru

Karamzin Dmitry Yuryevich, Computer center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, Doctor of physics and Mathematics, Senior Research Worker, e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru