УДК 517.958

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© С.Р. Керимова

Ключевые слова: оператор Бесселя; смешанная задача; гиперболическое уравнение.
Рассматривается смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка в параллелепипеде, содержащего оператор Бесселя по части пространственных переменных с граничными условиями первого и второго порядка.

Пусть R^{n+m} действительное евклидово пространство точек (x,y),

$$\Pi_{ab}=\{(x,y): 0\le x_i\le a_i,\ 0\le y_j\le b_j,\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m,\ Q_T=\Pi_{a,b}\times(0\le t\le T)\}.$$

В работе рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Pu+f(t,x,y), \tag{1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y), \tag{2}$$

$$u|_{x_i=0}=0,\ u|_{x_i=a_i}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y_j}\right|_{y_j=0}=0, u|_{y_j=b_j}=0,\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m, \tag{3}$$

$$P=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{k_1}{y_1}\frac{\partial u}{\partial y_1}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial y_m^2}+\frac{k_m}{y_m}\frac{\partial u}{\partial y_m},\ k_j>0.$$

Вопрос существования и единственности классических решений таких задач для широкого класса областей рассмотрен в работе [1]. При $m=0$ в [2]. В работе [3] для $m=1$ получено классическое решение задачи Дирихле для оператора P в полусферической области.

Пусть функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, и $f(t,x,y)$ обладают гладкостью

$$\varphi\in H_{k_1\ldots k_m}^{\left[\frac{n+m+k_1+\ldots+k_m}{2}\right]+3}(\Pi_{ab}), \psi\in H_{k_1\ldots k_m}^{\left[\frac{n+m+k_1+\ldots+k_m}{2}\right]+2}(\Pi_{ab}),\quad f\in H_{k_1\ldots k_m}^{\left[\frac{n+m+k_1+\ldots+k_m}{2}\right]+2}(Q_T)$$

и удовлетворяют условиям согласования $\varphi, P\varphi,\ldots,\ P^{\left[\frac{n-m-k_1-\ldots-k_m-1}{4}\right]}\varphi$, $\psi, P\psi,\ldots,\ P^{\left[\frac{n+m+k_1+\ldots+k_m+2}{4}\right]}\psi$ принадлежат пространству $\overset{0}{H}{}^{1}_{k_1}\ldots k^1_m(\Pi_{ab})$; $f, Pf,\ldots,$ $P^{\left[\frac{n+m+k_1+\ldots+k_m+2}{4}\right]}f$ принадлежат пространству $\overset{0}{H}{}^{1}_{k_1\ldots k_m}(Q_T)$, где $H_{k_1\ldots k_m}(\Omega)$, $\overset{0}{H}{}^{p}_{k_1\ldots k_m}(\Omega)$ определены в [4].

Тогда классическое решение задачи (1)–(3) представимо абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$u(t,x,y)=\sum_{s_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{s_n=1}^{\infty}\sum_{p_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{p_m=1}^{\infty}\left[\varphi_{mn}\cos\sqrt{\lambda_{mn}}t+\frac{\psi_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}}}\int\limits_0^t f_{mn}(\tau)\sin\sqrt{\lambda_{mn}}(t-\tau)d\tau\right]\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\pi s_1}{a_1}x_1\ldots\sin\frac{\pi s_n}{a_n}x_n y_1^{\frac{1-k_1}{2}}\ldots y_m^{\frac{1-k_m}{2}} J_{\frac{k_1-1}{2}}\left(\frac{\alpha_1^{p_1}}{b_1}y_1\right)\ldots J_{\frac{k_m-1}{2}}\left(\frac{\alpha_m^{p_m}}{b_m}y_m\right),$$

$$\varphi_{mn}=\frac{2^{m+n}}{a_1\ldots a_n b_1^2\ldots b_m^2 J^2_{\frac{k_1+1}{2}}(\alpha_1^{p_1})\ldots J^2_{\frac{k_m+1}{2}}(\alpha_m^{p_m})}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{a_1}\ldots\int\limits_0^{a_n}\int\limits_0^{b_1}\ldots\int\limits_0^{b_m}\varphi(x,y)\sin\frac{\pi s_1}{a_1}x_1\ldots\sin\frac{\pi s_n}{a_n}x_n J_{\frac{k_1-1}{2}}\left(\frac{\alpha_1^{p_1}}{b_1}y_1\right)\ldots J_{\frac{k_m-1}{2}}\left(\frac{\alpha_m^{p_m}}{b_m}y_m\right)y_1^{k_1}\ldots y_m^{k_m}\,dxdy,$$

$\alpha_j^{p_j}$ — положительные корни уравнения $J_{\frac{k_j-1}{2}}(\alpha)=0$,

$$\lambda_{mn}^2=\frac{\pi^2 s_1^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{\pi^2 s_n^2}{a_n^2}+\frac{(\alpha_1^{p_1})^2}{b_1^2}+\ldots+\frac{(\alpha_m^{p_m})^2}{b_m^2}.$$

Коэффициенты φ_{mn}, ψ_{mn}, f_{mn} определяются аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сазонов А.Ю., Фомичева Ю.Г.* О классическом решении смешанных задач для некоторых сингулярных гиперболических и параболических уравнений // Вестник Тамбовского университета. 2013. Т. 18. Вып. 5. С. Этой статьи нет в журнале

2. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15. Вып. 2. С. 37-154

3. *Олевский М.Н.* Решение задачи Дирихле относящейся к управлению $\Delta u+\frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}$ для полусферической области // ДАН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 770-776.

4. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках программы «Развитие деятельности студенческих объединений».

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Kerimova S.R.

ON CLASSICAL SOLUTION OF MIXED PROBLEMS FOR CERTAIN SINGULAR HYPERBOLIC EQUATIONS

The mixed problem for a hyperbolic equation in a parallelepiped containing the Bessel operator on some space variables with the first and second order boundary conditions is considered.

Key words: Bessel operator; mixed problem; hyperbolic equation.

Керимова Саида Рассимовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, студентка специальности «Прикладная математика и информатика» института математики, физики и информатики, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Kerimova Saida Rassimovna, Tambov state university named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Student of Institute of Mathematics, Physics and Computer Sciences in the Specialty «Applied Mathematics and Computer Sciences», e-mail:aib@tsu.tmb.ru