УДК 517.988.6, 517.922

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© И.И. Пасечников, В.С. Трещев

Ключевые слова: дифференциальное уравнение неявного вида с отклоняющимся аргументом; периодические решения; краевая задача; накрывающие отображения.

Получены условия существования периодических решений дифференциального уравнения неявного вида с отклоняющимся аргументом. Используется редукция соответствующей периодической краевой задачи к интегральному уравнению с помощью W -подстановки Н.В. Азбелева. Для исследования полученного интегрального уравнения применяются утверждения о накрывающих отображениях.

Пусть $T > 0$. Будем использовать следующие обозначения для пространств функций, определенных на $[0, T]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$: L_∞^n – банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|x\|_{L_\infty^n} = \text{vrai sup}_{t \in [0, T]} |x(t)|$; AC_∞^n – банахово пространство та-
ких абсолютно непрерывных функций, что $\dot{x} \in L_\infty^n$, с нормой $\|x\|_{AC_\infty^n} = \|\dot{x}\|_{L_\infty^n} + |x(a)|$; C^n – пространство непрерывных функций, $\|x\|_{C^n} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$.

Пусть для любого $i = \overline{1, n}$ заданы действительные числа γ_i , измеримая T -периодическая функция $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и функция $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям Каратеодори и являющаяся T -периодической по первому аргументу. Будем предполагать, что для любого $r > 0$ найдется такое число M , что при любых $x, w \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих оценке $|x| + |w| \leq r$, и при почти всех $t \in [0, T]$ (а значит, и при почти всех $t \in \mathbb{R}$) имеет место неравенство $|f(t, x, w)| \leq M$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i\left(t, x_1(h_{i1}(t)), \dots, x_n(h_{in}(t)), \dot{x}_i(t) + \gamma_i x_i(t)\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Нас интересуют условия существования T -периодического решения уравнения (1), т. е. удовлетворяющей этому уравнению при п.в. $t \in \mathbb{R}$ абсолютно непрерывной T -периодической функции $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, такую, что ее сужение на $[0, T]$ является элементом пространства AC_∞^n .

Определим для всех $i, j = \overline{1, n}$ измеримые функции $\tilde{h}_{ij}(t) = T\{h_{ij}(t)T^{-1}\}$, где символом $\{\cdot\}$ обозначена дробная часть числа. Заметим, что $\tilde{h}_{ij}([0, t]) \subset [0, t]$, и для любой T -периодической функции $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено $u(\tilde{h}_{ij}(t)) = u(h_{ij}(t))$.

Рассмотрим теперь следующую краевую задачу:

$$f_i\left(t, x_1(\tilde{h}_{i1}(t)), \dots, x_n(\tilde{h}_{in}(t)), \dot{x}_i(t) + \gamma_i x_i(t)\right) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$x_i(0) - x_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Уравнение (1) имеет T -периодическое решение тогда и только тогда, когда определенная здесь периодическая краевая задача (2), (3) разрешима. Если $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – решение этой краевой задачи, то ее T -периодическое продолжение будет решением уравнения (1) на всем $\mathbb{R}$, и

обратно, если $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — T -периодическое решение уравнения (1), то его сужение на $[0, T]$ будет решением задачи (2), (3).

Итак, исследуем краевую задачу (2), (3). Воспользуемся W -подстановкой Н.В. Азбелева [1]. Выберем вспомогательную краевую задачу

$$\dot{x}_i(t) + \gamma_i x_i(t) = y_i(t), \quad t \in [0, T], \quad x_i(0) - x_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

решение которой определяется формулой

$$x_i(t) = \int_0^T G_i(t, s) y_i(s) ds, \quad G_i(t, s) = \begin{cases} (e^{\gamma_i T} - 1)^{-1} e^{\gamma_i(s-t+T)}, & \text{если } s \leq t, \\ (e^{\gamma_i T} - 1)^{-1} e^{\gamma_i(s-t)}, & \text{если } s > t. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, краевая задача (2), (3) равносильна системе уравнений

$$f_i(t, \int_0^T G_1(\tilde{h}_{i1}(t), s) y_1(s) ds, \dots, \int_0^T G_n(\tilde{h}_{in}(t), s) y_n(s) ds, y_i(t)) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Если y — решение уравнения (5), то, подставляя эту функцию в соотношение (4), мы найдем решение x краевой задачи (2), (3) (периодическое продолжение которого, как уже отмечалось, будет решением исходного уравнения (1))

Для исследования разрешимости системы (5) мы воспользуемся утверждениями о накрывающих отображениях [2–5].

Пусть X, Y метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y , соответственно. Будем использовать следующее определение.

О п р е д е л е н и е [2]. Отображение $F: X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, $\alpha > 0$, если для любых $x_0 \in X, y \in Y$ существует $x \in X$, удовлетворяющий уравнению $F(x) = y$ и оценке

$$\rho_X(x, x_0) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, F(x_0)).$$

Т е о р е м а. Пусть для всех $i = \overline{1, n}$ выполнены следующие условия: существует такое $\alpha_i > 0$, что при почти всех $t \in [0, T]$ и любом $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $f_i(t, x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является α_i -накрывающим; для любого $j = \overline{1, n}$ существует такое $\beta_{ij} \geq 0$, что при почти всех $t \in [0, T]$ и любом $w \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ отображение $f_i(t, x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n, w): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является β_{ij} -липшицевым. Тогда, если матрица

$$C = \left((\alpha_i \gamma_i)^{-1} \beta_{ij} \right)_{n \times n} \quad (6)$$

имеет спектральный радиус $\rho(C) < 1$, то существует решение $x \in AC_\infty^n$ краевой задачи (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на результатах [3].

Определим для любого $i = \overline{1, n}$ отображение $\Phi_i: L_\infty \times L_\infty^n \rightarrow L_\infty$ соотношением

$$\left(\Phi_i(u_i, v_1, \dots, v_n) \right)(t) = f_i \left(t, \int_0^T G_1(\tilde{h}_{i1}(t), s) v_1(s) ds, \dots, \int_0^T G_n(\tilde{h}_{in}(t), s) v_n(s) ds, u_i(t) \right).$$

Теперь запишем систему (5) в виде системы операторных уравнений

$$\Phi_i(y_i, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Для исследования полученной системы (7) воспользуемся результатами работы [3].

В силу [3, теорема 3] отображение $\Phi_i(\cdot, v_1, \dots, v_n): L_\infty \rightarrow L_\infty$ является α_i -накрывающим, $i = \overline{1, n}$. Далее, для произвольного $j = \overline{1, n}$ и любых $v_j, \tilde{v}_j \in L_\infty$ выполнено

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\Phi_i(u_i, v_1, \dots, v_j, \dots, v_n) - \Phi_i(u_i, v_1, \dots, \tilde{v}_j, \dots, v_n) \right) \right\|_{L_\infty} \leq \\ & \leq \beta_{ij} \text{vrai} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_0^T G_i(\tilde{h}_{ij}(t), s) |v_j(s) - \tilde{v}_j(s)| ds \right) \leq \gamma_i^{-1} \beta_{ij} \|v_j - \tilde{v}_j\|_{L_\infty}. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение $\Phi_i(u_i, v_1, \dots, v_{j-1}, \cdot, v_{j+1}, v_n): L_\infty \rightarrow L_\infty$ является липшицевым с константой $\tilde{\beta}_{ij} \doteq \gamma_i^{-1} \beta_{ij}$.

Согласно [3, теорема 1], для доказательства утверждения остается заметить, что матрица $((\alpha_i \gamma_i)^{-1} \tilde{\beta}_{ij})_{n \times n}$ – это матрица C , которая определяется равенством (6), и ее спектральный радиус $\varrho(C) < 1$.

С л е д с т в и е. При выполнении условий доказанной теоремы уравнение (1) имеет T -периодическое решение.

В заключение отметим, что идея применения накрывающих отображений к исследованию неявных дифференциальных уравнений была предложена в работе [4]. Для таких уравнений в [4]–[8] сформулированы условия разрешимости и корректности задачи Коши, в [3], [9], [10] исследована аperiodическая краевая задача, в [11] – периодическая краевая задача. В работе [12] получены условия разрешимости аperiodической краевой задачи для скалярного уравнения с отклоняющимся аргументом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.
3. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439-456.
4. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.
5. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523-1537.
6. Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S., Zhukovskii S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra gathers // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. P. 1026-1044.
7. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. V. 90. №. 6. P. 889-898.
8. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561-1570.
9. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673-1674.
10. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в проблеме корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1082-1085.
11. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. О периодической краевой задаче для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2012. Вып. 1 (39). С. 52-53.
12. Трещёв В.С. Разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18.

Вып. 5. С. 2708-2710.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-00877, № 14-01-97504).

Pasechnikov I.I., Treshchev V.S.

EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENT

The conditions of resolvability of a periodic boundary-value problem for an implicit differential equation with deviating argument are derived. The reduction of a boundary value problem to an integral equation by means of W -substitution N.V. Azbelev is used. Statements about covering mappings are applied to study the integral equation obtained.

Key words: an implicit differential equation with deviating argument; periodic solution; boundary-value problem; covering mappings.

Пасечников Иван Иванович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры общей физики, e-mail: pasechnikov_ivan@mail.ru

Pasechnikov Ivan Ivanovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor of General Physic Department, e-mail: pasechnikov_ivan@mail.ru

Трещев Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра алгебры и геометрии, e-mail: SirValentino@yandex.ru

Treshchev Valentin Sergeevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Postgraduate Student, Algebra and Geometry Department, e-mail: SirValentino@yandex.ru