

УДК 519.46

## НЕКОТОРЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПОЛУПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП ЛИ

© А. М. Попов, А. Ю. Лисица

*Ключевые слова:* каноническое подпространство; линейное представление; стационарная подгруппа общего положения.

Приводятся канонические подпространства для некоторых полупростых линейных групп Ли с конечной стационарной подгруппой общего положения.

Будем считать основным полем поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Топологические термины будем считать относящимися к топологии Зарисского. Для действия алгебраической группы  $G$  на алгебраическом многообразии  $X$  подгруппа  $H \subset G$  называется стационарной подгруппой общего положения, если в  $X$  существует открытое по Зарисскому множество, стационарные подгруппы точек которого сопряжены  $H$ . В этом случае для множества  $X^H = \{x \in X | Hx = x\}$ , очевидно,  $\overline{GX^H} = X$ .

В настоящей работе рассматриваются связные полупростые комплексные линейные группы Ли  $G \subset GL(V)$ . Подпространство  $L \subset V$  будем называть каноническим подпространством, если  $\overline{GL} = V$  и  $L$  – минимальное (по включению) подпространство с таким свойством. Очевидно, если  $\overline{GL} = V$  и  $\dim G \mid \dim L = \dim V$ , то  $L$  – каноническое подпространство. В этом случае с помощью действия группы  $G$  на линейном пространстве  $V$  «почти любой» элемент из  $V$  (а точнее, любой элемент из открытого по Зарисскому подмножества в  $V$ ) можно привести к каноническому виду, т. е. к элементу из  $L$ .

Всюду в дальнейшем  $\mathcal{G}$  – алгебра Ли группы  $G$ ,  $r$  – ранг алгебры  $\mathcal{G}$ ,  $\varphi_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) – старший вес  $i$ -го базисного представления,  $R(\Lambda)$  – неприводимое представление со старшим весом  $\Lambda$ . В работах [1], [2] автора найдены все простые и неприводимые полупростые линейные группы  $G$  над полем  $\mathbb{C}$ , у которых для действия в линейных пространствах  $V$  стационарные подгруппы общего положения  $H / \{e\}$  и конечны. Все эти группы перечислены в таблицах работ [1] и [2]. Для них  $\overline{GV^H} = V$ , и для некоторых линейных групп из таблицы работы [2] проверено, что подпространство  $V^H$  является каноническим подпространством, а сами канонические подпространства  $V^H$  найдены и перечислены в работе [2]. В настоящей работе приводятся канонические подпространства для групп из [2], не найденные ранее.

1. Рассмотрим действие группы  $Sp(\mathbb{C}^4) \otimes SL(\mathbb{C}^3) \otimes SL(\mathbb{C}^2)$  в пространстве  $V = S \otimes U \otimes W$ , где  $S = \mathbb{C}^4$ ,  $U = \mathbb{C}^3$ ,  $W = \mathbb{C}^2$ . В этом случае  $H = (\mathbb{Z}_2)^2$  и элементы  $H$  приведены в работе [2]. Пусть  $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  – базис в пространстве  $S$ ,  $\{u_1, u_2, u_3\}$  – базис в пространстве  $U$ ,  $\{w_1, w_2\}$  – базис в пространстве  $W$ . Тогда  $\{s_i \otimes u_j \otimes w_k, 1 \leq i \leq 4, j = 1, 2, 3, k = 1, 2\}$  – базис в пространстве  $V$  и для любого  $v \in V$   $v = \sum x^{ijk} s_i \otimes u_j \otimes w_k$ . Легко видеть, что подпространство  $V^H$  задается системой уравнений  $x^{111} = x^{121} = x^{211} = x^{221} = x^{331} = x^{431} = x^{312} = x^{322} = x^{412} = x^{422} = x^{132} = x^{232} = 0$ ,  $\dim V^H = 12$ , и подпространство  $V^H$  не является каноническим, т. е. оно не минимальное. Но подпространство  $L \subset V$ ,

$L = \langle s_3 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_2 \otimes u_2 \otimes w_2, s_4 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_1 \otimes u_2 \otimes w_2, s_4 \otimes u_2 \otimes w_1 + s_1 \otimes u_3 \otimes w_1 + s_1 \otimes u_1 \otimes w_2 + s_4 \otimes u_3 \otimes w_2 \rangle$  – каноническое. Доказательство этого факта сводится к проверке того, что  $L + \mathcal{G}L = V$ , т. е. к проверке того, что не равен нулю соответствующий определитель 24-го порядка. Кроме того,  $\dim G \mid \dim L = 21 \mid 3 = 24 = \dim V$ , т. е.  $L$  – минимальное. Таким

образом, любой тензор из открытого по Зарисскому множества в  $V$  можно привести действием группы  $G$  к каноническому виду

$$\eta(s_1 \otimes u_2 \otimes w_1 + s_1 \otimes u_3 \otimes w_1 + s_1 \otimes u_4 \otimes w_2 + s_4 \otimes u_3 \otimes w_2) + \lambda(s_3 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_2 \otimes u_2 \otimes w_2) + \mu(s_4 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_1 \otimes u_2 \otimes w_2).$$

Представляя тензоры из  $V$  трехмерными матрицами, можно утверждать, что любую трехмерную  $(4, 3, 2)$ -матрицу из открытого по Зарисскому подмножества в  $V$  можно привести действием группы  $G$  к каноническому виду  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \eta \\ \eta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \right\}$ , где левая матрица – верхний слой трехмерной матрицы, а правая матрица – ее нижний слой.

2. Рассмотрим действие группы  $SL(\mathbb{C}^5) \otimes SO(\mathbb{C}^3)$  ( $R(\varphi_2) \otimes id$ ) в пространстве  $V = U \otimes W$ , где  $U = U(A_1, R(\varphi_2))$  – пространство представления  $R(\varphi_2)$  группы  $SL(\mathbb{C}^5)$ ,  $W = \mathbb{C}^3$ . В этом случае  $H = (\mathbb{Z}_2)^2$  и элементы  $H$  приведены в работе [2]. Пусть  $\{u_1, \dots, u_5\}$  – базис в пространстве  $\mathbb{C}^5$ ,  $\{w_1, w_2, w_3\}$  – базис в пространстве  $W$ . Тогда базисом в пространстве  $U$  является  $\{u_i \wedge u_j, 1 \leq i < j \leq 5\}$ , а базисом в пространстве  $V = U \otimes W$  является  $\{(u_i \wedge u_j) \otimes w_k, 1 \leq i < j \leq 5, k = 1, 2, 3\}$ . Легко проверить, что подпространство  $V^H = \langle (u_1 \wedge u_2) \otimes w_1 - (u_4 \wedge u_5) \otimes w_3, (u_1 \wedge u_3) \otimes w_1 - (u_3 \wedge u_5) \otimes w_3, (u_1 \wedge u_4) \otimes w_1 - (u_2 \wedge u_5) \otimes w_3, (u_2 \wedge u_5) \otimes w_1 - (u_1 \wedge u_4) \otimes w_3, (u_3 \wedge u_5) \otimes w_1 - (u_1 \wedge u_3) \otimes w_3, (u_4 \wedge u_5) \otimes w_1 - (u_1 \wedge u_2) \otimes w_3, (u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_4) \otimes w_2, (u_1 \wedge u_5) \otimes w_2, (u_2 \wedge u_4) \otimes w_2 \rangle$ ,  $\dim V^H = 9$ , и подпространство  $V^H$  не является каноническим, т. к. оно не минимальное. Но подпространство  $L \subset V$ ,

$L = \langle (u_1 \wedge (u_3 + u_4)) \otimes w_1 - ((u_2 + u_3) \wedge u_5) \otimes w_3, (u_2 \wedge u_4 + u_1 \wedge u_5) \otimes w_2, (u_4 \wedge u_5) \otimes w_1 - (u_1 \wedge u_2) \otimes w_3 \rangle$  – каноническое. Для доказательства этого нужно проверить, что  $L \perp \mathcal{G}L = V$ , то есть что не равен нулю соответствующий определитель 30-го порядка. Кроме того,  $\dim G + \dim L = 27 + 3 = \dim V$ .

3. Рассмотрим действие группы  $Sp(\mathbb{C}^4) \otimes SL(\mathbb{C}^4) \otimes SL(\mathbb{C}^2)$  в пространстве  $V = S \otimes U \otimes W$ , где  $S = \mathbb{C}^4$ ,  $U = \mathbb{C}^4$ ,  $W = \mathbb{C}^2$ . В этом случае  $H = (\mathbb{Z}_2)^2$  (см. [2]). Пусть  $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  – базис в пространстве  $S$ ,  $\{u_1, \dots, u_4\}$  – базис в пространстве  $U$ ,  $\{w_1, w_2\}$  – базис в пространстве  $W$ . Тогда  $\{u_i \otimes u_j \otimes w_k, 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4, k = 1, 2\}$  – базис в пространстве  $V$ , и подпространство  $V^H = \langle s_1 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_4 \otimes u_2 \otimes w_2, s_1 \otimes u_2 \otimes w_1 + s_4 \otimes u_1 \otimes w_2, s_2 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_3 \otimes u_2 \otimes w_2, s_2 \otimes u_2 \otimes w_1 + s_3 \otimes u_1 \otimes w_2, s_3 \otimes u_3 \otimes w_1 - s_2 \otimes u_4 \otimes w_2, s_3 \otimes u_4 \otimes w_1 - s_2 \otimes u_3 \otimes w_2, s_4 \otimes u_3 \otimes w_1 - s_1 \otimes u_4 \otimes w_2, s_4 \otimes u_4 \otimes w_1 - s_1 \otimes u_3 \otimes w_2 \rangle$ ,  $\dim V^H = 8$ , и подпространство  $V^H$  не является каноническим, так как оно не минимальное. Но, например, подпространство  $L \subset V$ ,  $L = \langle s_1 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_4 \otimes u_2 \otimes w_2, s_2 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_3 \otimes u_2 \otimes w_2 + s_3 \otimes u_3 \otimes w_1 - s_2 \otimes u_4 \otimes w_2, s_2 \otimes u_2 \otimes w_1 + s_3 \otimes u_1 \otimes w_2, s_4 \otimes u_4 \otimes w_1 - s_1 \otimes u_3 \otimes w_2 \rangle$  – каноническое. Доказательство этого факта сводится к проверке того, что  $L + \mathcal{G}L = V$ , т. е. к проверке того, что не равен нулю соответствующий определитель 32-го порядка. Кроме того,  $\dim G + \dim L = 28 + 4 = 32 = \dim V$ , то есть  $L$  – минимальное подпространство.

Представляя тензоры из  $V$  трехмерными матрицами можно утверждать, что любую трехмерную  $(4, 4, 2)$ -матрицу из открытого по Зарисскому подмножества в  $V$  можно привести

действием группы  $G$  к каноническому виду  $\left\{ \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \\ \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ , где левая матрица – верхний слой трехмерной матрицы, а правая матрица – ее нижний слой.

4. Рассмотрим действие группы  $Spin(7) \otimes SL(\mathbb{C}^2) \otimes SL(\mathbb{C}^2)$  в пространстве  $V = S \otimes U \otimes W$ , где  $S = S(B_3, R(\varphi_3))$  – пространство спинорного представления  $R(\varphi_3)$  группы  $Spin(7)$ ,  $\dim S = 8$ ,  $U = \mathbb{C}^2$ ,  $W = \mathbb{C}^2$ . В этом случае  $H = (\mathbb{Z}_2)^2$  и элементы  $H$  приведены в работе [2].

Пусть  $\{s_1, \dots, s_8\}$  – базис в пространстве  $S$ ,  $\{u_1, u_2\}$  – базис в пространстве  $U$ ,  $\{w_1, w_2\}$  – базис в пространстве  $W$ . Тогда базисом в пространстве  $V = S \otimes U \otimes W$  является  $\{s_i \otimes u_j \otimes$

$\otimes w_k, 1 \leq i \leq 8, j = 1, 2, k = 1, 2\}$ . Пусть  $\pm \varepsilon_1, \pm \varepsilon_2, \pm \varepsilon_3, 0$  — веса (относительно стандартной картановской подалгебры) простейшего представления алгебры  $B_3$ .

Тогда представление  $Spin7$  имеет веса  $(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3)/2$ , и его старший вес  $\Lambda_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/2$ . Простые корни алгебры  $B_3$  — это  $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \alpha_3 = \varepsilon_3$ . Обозначим веса представления  $Spin7$  через  $\pm \Lambda_1, \pm \Lambda_2, \pm \Lambda_3, \pm \Lambda_4$ , где  $\Lambda_2 = \Lambda_1 - \alpha_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)/2, \Lambda_3 = \Lambda_2 - \alpha_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/2, \Lambda_4 = \Lambda_3 - \alpha_1 = (-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/2$ . Пусть базисные векторы в пространстве  $S$  представления группы  $Spin7$  — это:  $s_i = s_{\Lambda_i}$  — весовые векторы с весами  $\Lambda_i, i = 1, 2, 3, 4, s_5 = s_{-\Lambda_1}, s_6 = s_{-\Lambda_3}, s_7 = s_{-\Lambda_2}, s_8 = s_{-\Lambda_4}$ . Легко видеть, что 16-мерное подпространство  $V^H$  не является каноническим, т. к. оно не минимальное. Но, например, 5-мерное подпространство  $L \subset V^H, L = \langle s_3 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_6 \otimes u_2 \otimes w_2, s_5 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_4 \otimes u_2 \otimes w_2, s_6 \otimes u_1 \otimes w_1 + s_3 \otimes u_2 \otimes w_2, s_1 \otimes u_2 \otimes w_1 - s_8 \otimes u_1 \otimes w_2, s_8 \otimes u_2 \otimes w_1 - s_1 \otimes u_1 \otimes w_2 \rangle$  — каноническое. Доказательство этого факта сводится к проверке того, что  $L + \mathcal{G}L = V$ , т. е. к проверке того, что не равен нулю соответствующий определитель 32-го порядка. Кроме того,  $\dim G + \dim L = 27 + 5 = 32 = \dim V$ , то есть  $L$  — минимальное подпространство.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Попов А.М. Конечные стационарные подгруппы общего положения простых линейных групп Ли // Труды ММО. 1985. Т. 48. С. 7-59.
2. Попов А.М. Стационарные подгруппы общего положения для некоторых действий простых групп Ли // Труды ММО. 1987. Т. 50. С. 209-248.

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Popov A.M., Lisitsa A.Yu.

#### SOME CANONICAL SUBSPACES OF SEMISIMPLE LINEAR LIE GROUPS

The canonical subspaces for some semisimple linear Lie groups with finite isotropy subgroup in general position are given.

*Key words:* canonical subspace; linear representation; isotropy subgroup in general position.

Попов Александр Митрофанович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: 3.14pat@bk.ru

Popov Alexander Mitrofanovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: 3.14pat@bk.ru

Лисица Андрей Юрьевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: a-lisica@yandex.ru

Lisitsa Andrey Yuryevich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Senior Lecturer of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: a-lisica@yandex.ru