

УДК 517.95

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ОПЕРАТОР БЕССЕЛЯ ПО ЧАСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© А. Ю. Сазонов

Ключевые слова: оператор Бесселя; смешанная задача; параболическое уравнение.

Устанавливаются достаточные условия на границу области, коэффициенты оператора, правую часть и начальную функцию, при которых ряд Фурье представляет классическое решение смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка, содержащего оператор Бесселя по нескольким пространственным переменным.

Обозначим через $\mathbb{R}_+^{n+m}$ часть пространства $y_1 > 0, \dots, y_m > 0$ точек $x = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (x', y')$ действительного евклидова $(n + m)$ -мерного пространства $\mathbb{R}^{n+m}$. Пусть Ω^+ произвольная ограниченная область, расположенная в $\mathbb{R}_+^{n+m}$ и прилегающая к гиперплоскостям $y_1 = 0, \dots, y_m = 0$. Обозначим через $\Gamma_1^0, \dots, \Gamma_m^0$ часть границы области Ω^+ , лежащей на гиперплоскостях $y_1 = 0, \dots, y_m = 0$, $\Gamma^0 = \Gamma_1^0 \cup \dots \cup \Gamma_m^0$, Γ^+ замыкание оставшейся части границы, $Q_T^+ = (n + m + 1)$ -мерный цилиндр, равный произведению $\Omega^+ \times (0 < t < T)$. В данной статье изучается вопрос о разрешимости в классическом смысле смешанной задачи для сингулярного параболического уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_{y'} u = f(x, t) \quad \text{в цилиндре } Q_T^+, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{в области } \Omega^+, \quad (3.2)$$

$$u|_{\Gamma^+} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y_i} \right|_{\Gamma_i^0} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.3)$$

Здесь $\varphi(x)$, $f(x, t)$ заданные функции, определенные в областях Ω^+ и Q_T^+ , соответственно. $L_{y'}$ — B -эллиптический оператор, определенный в области Ω^+ :

$$L_{y'} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^m b_i(x') B_{y_i} + c(x), \quad B_{y_i} = \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{k_i}{y_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i},$$

где $c(x) \leq 0$, $k_i > 0$, $i = \overline{1, m}$. Условие B -эллиптичности, сформулированное в [1], сводится к выполнению условий $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и равномерно по $x \in \Omega^+$ и любого $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+m})$, $|\gamma| \neq 0$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \gamma_i \gamma_j + \sum_{i=1}^m b_i(x') \gamma_{n+i}^2 \geq \delta |\gamma|^2, \quad (3.4)$$

где δ некоторое положительное число.

Классической задаче (1)–(3) ($m = 0$, $L_{y'}$ — самосопряженный эллиптический оператор) посвящено большое количество работ, начиная с самого первого результата ($n = 1, m = 0$)

В.А. Стеклова [2] и до наиболее полных к настоящему времени результатов ($m = 0$) В.А. Ильина [3]. В неклассической задаче случай $m = 1$ рассмотрен в работе [4].

Общее решение задачи (1)–(3) представимо рядом Фурье

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x) \left[\varphi_p e^{-\lambda_p t} + \int_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p(t-\tau)} d\tau \right], \quad (3.5)$$

в котором $v_p(x)$ — ортонормированные собственные функции, а λ_p — соответствующие собственные значения краевой задачи:

$$L_{y'} v + v = 0 \quad \text{в области } \Omega^1, v|_{\Gamma^1} = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial y_i} \right|_{\Gamma_i^0} = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Через φ_p и $f_p(t)$ обозначены коэффициенты Фурье разложения функций $\varphi(x)$ и $f(x, t)$:

$$\varphi_p = \int_{\Omega^+} \varphi(x) v_p(x) y^k dx, \quad f_p(t) = \int_{\Omega^+} f(x, t) v_p(x) y^k dx, \quad y^k = y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m) = (\alpha', \beta')$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_m$, $D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D_{x'} = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$, $\tilde{D}_{y_i} = \frac{\partial}{y_i \partial y_i}$, $\tilde{D}_{y'} = (\tilde{D}_{y_1}, \dots, \tilde{D}_{y_m})$.

Через $C_+^s(\Omega^1 \cup \Gamma^0)$, $s = 0, 1, \dots, \infty$ обозначим множество функций, четных по переменным $y_1, \dots, y_m$ и s раз непрерывно дифференцируемых в $\Omega^1 \cup \Gamma^0$. Обозначим через $H_{k,1}^s(\Omega^+)$ (см. [5]) замыкание множества $C_+^s(\Omega^+ \cup \Gamma^0)$ по норме

$$\|u\|_{H_{k,1}^s}^2 = \int_{\Omega^+} |u|^2 y^k dx + \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega^+} |D_{x'}^{\alpha'} \tilde{D}_{y'}^{\beta'} u|^2 y^{k+2\beta'} dx.$$

Положим $H_{k,1}^0(\Omega^+) = L_{2,k}(\Omega^+)$. Замыкание подмножества $\overset{0}{C}_+^1(\Omega^+ \cup \Gamma^0)$ функций из класса $\overset{0}{C}_+^1(\Omega^1 \cup \Gamma^0)$ равных нулю вблизи Γ^1 , по норме пространства $H_{k,1}^1(\Omega^1)$ образуют функциональное пространство $\overset{0}{H}_{k,1}^1(\Omega^1)$.

Л е м м а 1. Если $\varphi \in \overset{0}{H}_{k,1}^1(\Omega^1)$, $\psi \in H_{k,1}^1(\Omega^1)$, то

$$\int_{\Omega^+} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \psi y^k dx = - \int_{\Omega^1} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} y^k dx, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

Если $\psi \in \overset{0}{H}_{k,1}^2(\Omega^+)$, то

$$\int_{\Omega^+} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} y^k dx = - \int_{\Omega^+} \varphi B_{y_i} \psi y^k dx, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем равенство (7). Согласно определению пространства $\overset{0}{H}_{k,1}^1(\Omega^+)$ существует последовательность функций φ_δ , четных по переменным y_i , непрерывно дифференцируемых и равных нулю вблизи Γ^1 , сходящихся по норме пространства $H_{k,1}^1(\Omega^1)$ к функции φ . Для функции φ_δ имеем

$$\int_{\Omega^+} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} y^k dx = - \int_{\Omega^+} \varphi_\delta B_{y_i} \psi y^k dx, \quad i = \overline{1, m}. \quad (3.8)$$

Согласно неравенству Коши – Буняковского,

$$\int_{\Omega^+} \left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) \psi y^k dx \leq \left\| \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right\|_{H_{k,+}^1(\Omega^+)} \int_{\Omega^+} \psi^2 y^k dx, \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega^-} (\varphi_\delta - \varphi) B_{y_i} \psi y^k dx \leq \left\| \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial y_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right\|_{H_{k,+}^1(\Omega^+)} \int_{\Omega^+} (B_{y_i} \psi)^2 y^k dx, i = \overline{1, m}. \quad (3.10)$$

при $\delta > 0$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в равенстве (8) и неравенствах (9), (10), получим формулу (7). Равенство (6) устанавливается аналогично.

Л е м м а 2. Для любой функции $\varphi \in \overset{0}{H}_{k,+}^1(\Omega^+)$ справедливо неравенство следующего вида:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2 \lambda_p^2 \leq \int_{\Omega^+} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)^2 - c \varphi^2 \right] y^k dx, \quad (3.11)$$

где $\varphi_p(x)$ – коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$ по системе собственных функций $\{v_p(x)\}$. В частности, утверждается сходимость числового ряда, стоящего в левой части (11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой $\varphi \in \overset{0}{H}_{k,+}^1(\Omega^+)$ и $v_p(x)$ имеем:

$$\int_{\Omega^+} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial v_p}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - c v_p \varphi \right] y^k dx = \lambda_p \int_{\Omega^+} \varphi v_p y^k dx = \lambda_p \varphi_p. \quad (3.12)$$

Пологая в тождестве (12) $\varphi(x) = v_l(x)$, получим:

$$\int_{\Omega^+} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial v_p}{\partial y_i} \frac{\partial v_l}{\partial y_i} - c v_p v_l \right] y^k dx = \begin{cases} \lambda_p, l=p, \\ 0, l \neq p. \end{cases} \quad (3.13)$$

Рассмотрим следующую неотрицательную величину:

$$\int_{\Omega^+} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi - \sum_{p=1}^{p_0} \varphi_p v_p \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi - \sum_{p=1}^{p_0} \varphi_p v_p \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\varphi - \sum_{p=1}^{p_0} \varphi_p v_p \right)^2 - c \left(\varphi - \sum_{p=1}^{p_0} \varphi_p v_p \right)^2 \right] y^k dx \geq 0.$$

Раскрывая скобки и учитывая (12) и (13), получим

$$\int_{\Omega^+} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)^2 - c \varphi^2 \right] y^k dx - \sum_{p=1}^{p_0} \varphi_p^2 \geq 0$$

откуда вытекает неравенство Бесселя (11).

Л е м м а 3. Для любой функции $\varphi \in \overset{0}{H}_{k,+}^1(\Omega^+)$ и обладающей обобщенными производными второго порядка принадлежащих классу $L_{2,k}(\Omega^+)$ справедливо неравенство вида:

$$\sum_{p=1}^{p_0} \varphi_p^2 \leq \int_{\Omega^+} (L_y \varphi) y^k dx. \quad (3.14)$$

В частности, утверждается сходимость числового ряда, стоящего в левой части (14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям леммы 3 справедливо тождество (12). Производя в этом тождестве интегрирование по частям с помощью леммы 1, в которой полагаем $\varphi = v_p$, получим

$$-\int_{\Omega^+} v_p L_{y'} \varphi y^k dx = \lambda_p \int_{\Omega^+} \varphi v_p y^k dx = \lambda_p \varphi_p$$

или

$$-(L_{y'} \varphi)_p = \lambda_p \varphi_p. \quad (3.15)$$

Здесь $(L_{y'} \varphi)_p$ обозначает коэффициент Фурье функции $L_{y'} \varphi$. Записывая для функции $L_{y'} \varphi$ неравенство Бесселя и учитывая равенство (15), получим неравенство (14).

Л е м м а 4. Пусть коэффициенты $a_{i,j}(x)$, оператора $L_{y'}$ имеют в замкнутой области $\overline{\Omega^+}$ непрерывные производные до порядка s , коэффициенты $b_i(x)$ и $c(x)$ до порядка $s-1$, s – любое целое положительное число. Пусть функция $\varphi \in H_{k,+}^{s+1}(\Omega^+)$ удовлетворяет следующему требованию:

$$\varphi, L_{y'} \varphi, \dots, L_{y'}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \varphi \quad \text{принадлежат пространству } H_{k,+}^0(\Omega^+).$$

Тогда для функции $\varphi(x)$ справедливы неравенства вида: для четного s

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2 \lambda_p^{s+1} \leq \int_{\Omega^+} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(L_{y'}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \varphi \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(L_{y'}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \varphi \right) + \sum_{i=1}^m b_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} L_{y'}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \varphi \right)^2 - c \left(L_{y'}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \varphi \right)^2 \right] y^k dx, \quad (3.16)$$

для нечетного s

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2 \lambda_p^{s+1} \leq \int_{\Omega^+} \left(L_{y'}^{\left[\frac{s+1}{2}\right]} \varphi \right)^2 y^k dx. \quad (3.17)$$

В частности, утверждается сходимость числовых рядов, стоящих в левых частях (16) и (17).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нечетного s лемма 4 доказывается последовательным применением леммы 3 к функциям $\varphi, L_{y'} \varphi, \dots, L_{y'}^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \varphi$.

При четном s лемма 4 доказывается применением леммы 3 к функциям $\varphi, L_{y'} \varphi, \dots, L_{y'}^{\left[\frac{s-2}{2}\right]} \varphi$ и применением леммы 2 к функции $L_{y'}^s \varphi$.

Л е м м а 5. Пусть коэффициенты оператора $L_{y'}$, начальная функция $\varphi(x)$, и правая часть уравнения $f(x, t)$ удовлетворяют следующим требованиям:

1) коэффициенты $a_{i,j}(x)$ и $c(x)$ удовлетворяют условию B -эллиптичности (4) и условию $c(x) \leq 0$ в замкнутой области $\overline{\Omega^+}$.

2) коэффициенты $a_{i,j}(x)$ имеют непрерывные производные до порядка $\left[\frac{n+m+k}{2} \right] + 1$, а коэффициенты $b_i(x')$ и $c(x)$ до порядка $\left[\frac{n+m+k}{2} \right]$;

3) $\varphi \in H_{k,+}^{\left[\frac{n-m+k}{2} \right] + 1}(\Omega^+)$ и, кроме того, функции $\varphi, L_{y'} \varphi, \dots, L_{y'}^{\left[\frac{n-m-k}{4} \right]} \varphi$ принадлежат пространству $H_{k,+}^0(\Omega^+)$;

4) $f \in H_{k,+}^{\left[\frac{n+m+k}{2} \right] + 2}(Q_T^+)$ и, кроме того, функции $f, L_{y'} f, \dots, L_{y'}^{\left[\frac{n-m-k+2}{4} \right]} f$ принадлежат пространству $H_{k,+}^0(Q_T^+)$.

Тогда утверждается сходимость следующих числовых рядов

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2 \lambda_p^{\left[\frac{n+m-k}{2}\right]+1}, \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^T f_p^2(\tau) \lambda_p^{\left[\frac{n+m-k}{2}\right]+2} d\tau, \quad (3.18)$$

$k = k_1 + \dots + k_m$, $[\alpha]$ — целая часть числа α .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4 при $s = \left[\frac{n+m+k}{2}\right]$, то сходимость первого ряда (18) следует из упомянутой леммы. Функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 4 при $s = \left[\frac{n+m+k}{2}\right]$, из которой следует сходимость ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_p^2(\tau) \lambda_p^{\left[\frac{n+m+k}{2}\right]+2}$$

для почти всех $\tau \in [0, T]$. Следовательно, существует интеграл

$$\int_0^T \sum_{p=1}^{\infty} f_p^2(\tau) \lambda_p^{\left[\frac{n+m+k}{2}\right]+2} d\tau.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега вытекает сходимость второго ряда в (18).

Лемма 5 в классической формулировке.

Л е м м а 6. Пусть коэффициенты оператора $L_{y'}$, начальная функция $\varphi(x)$, и правая часть уравнения $f(x, t)$ удовлетворяют следующим предположениям:

1) коэффициенты $a_{i,j}(x)$, $b_i(x')$ и $c(x)$ удовлетворяют условию B -эллиптичности (4) и условию $c(x) \leq 0$ в замкнутой области Ω^+ .

2) коэффициенты $a_{i,j}(x)$ имеют непрерывные производные до порядка $s+1$, а коэффициенты $b_i(x')$ и $c(x)$ до порядка s ;

3) $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема до порядка s ;

производная порядка $s+1$ принадлежит классу $L_{2,k}(\Omega^+)$;

$$\varphi|_{\Gamma^+} = 0, L_{y'}\varphi|_{\Gamma^+} = 0, \dots, L_{y'}^{\left[\frac{n+m-k}{2}\right]}\varphi|_{\Gamma^+} = 0;$$

4) $f(x, t)$ непрерывно дифференцируема до порядка $s+1$;

производная порядка $s+2$ принадлежит классу $L_{2,k}(Q_T^+)$;

$$f|_{\Gamma^+} = 0, L_{y'}f|_{\Gamma^+} = 0, \dots, L_{y'}^{\left[\frac{n+m+k-2}{2}\right]}f|_{\Gamma^+} = 0.$$

Тогда при $s = \left[\frac{n+m+k}{2}\right]$ справедливы утверждения леммы 5.

Т е о р е м а 1. Если $f(x, t) \equiv 0$ коэффициенты оператора $L_{y'}$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5, то ряд (5) сходится равномерно во всем замкнутом цилиндре $\overline{Q_T^+}$, а ряды, полученные однократным почленным дифференцированием ряда (5) по t и двукратным дифференцированием вида $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$, B_{y_i} сходятся равномерно в любой строго внутренней подобласти $\overline{Q_1^+} \subset Q_T^+$. При этом сумма ряда (5) определяет классическое решение задачи (1)–(3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях теоремы 1 ряд (5) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x) \varphi_p(x) e^{-\lambda_p t}. \quad (3.19)$$

Применяя к (19) неравенство Коши–Буняковского

$$\sum_{p=1}^{\infty} |v_p \varphi_p e^{-\lambda_p t}| \leq \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} v_p^2 \lambda_p^{-\left|\frac{n+m-k}{2}\right|-1} \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2 \lambda_p^{\left|\frac{n+m-k}{2}\right|+1} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и используя сходимость числового ряда $\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2 \lambda_p^{\left|\frac{n+m-k}{2}\right|+1}$ установленную в лемме 5, и равномерную в $\overline{\Omega^1}$ сходимость ряда $\sum_{p=1}^{\infty} v_p^2(x) \lambda_p^{-\left|\frac{n+m-k}{2}\right|-1}$, установленную в [4], получаем равно-

мерную сходимость ряда (19) в замкнутом цилиндре $\overline{Q_T^1}$. Обозначим ряды, полученные однократным дифференцированием ряда (5) по t , дифференцированием ряда (5) вида $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$ $1 \leq i, j \leq n$, B_{y_i} , $i = \overline{1, m}$ через U_t , $U_{x_i x_j}$, $U_{B_{y_i}}$, соответственно. Указанные ряды достаточно исследовать лишь при $t \geq \varepsilon$, ε – произвольное положительное число. Докажем сходимость этих рядов при единственном условии $\varphi \in L_{2,k}(\Omega^1)$. Пользуясь неравенством

$$e^{-\lambda_p t} \leq \frac{C_0}{(\sqrt{\lambda_p})^{s+3}}, s = \left[\frac{n+m+k}{2} \right], t \geq \varepsilon > 0,$$

оценим ряды U_t , $U_{x_i x_j}$, $U_{B_{y_i}}$ следующими рядами:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |v_p(x) \varphi_p| \frac{C_0}{(\sqrt{\lambda_p})^{s+1}}, \sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 v_p(x)}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_p \right| \frac{C_0}{(\sqrt{\lambda_p})^{s+3}}, \sum_{p=1}^{\infty} |B_{y_i} v_p(x) \varphi_p| \frac{C_0}{(\sqrt{\lambda_p})^{s+3}}, \quad (3.20)$$

C_0 – некоторая положительная константа. Применяя неравенство Коши–Буняковского к полученным рядам, используя сходимость числового ряда $\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p^2$, имеющую место в силу равенства Парсеваля для любой функции $\varphi \in L_{2,k}(\Omega^1)$ и используя равномерную сходимость рядов

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 v_p(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| (\sqrt{\lambda_p})^{-s-3}, \sum_{p=1}^{\infty} |B_{y_i} v_p(x)| (\sqrt{\lambda_p})^{-s-3},$$

установленную в [6], получим равномерную сходимость рядов (20).

Л е м м а 7. Пусть область Ω^1 , коэффициенты оператора $L_{y'}$ и $f(x, t)$ удовлетворяют требованиям леммы 5. Тогда ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_p(t) v_p(x) \quad (3.21)$$

сходится равномерно в замкнутом цилиндре $\overline{Q_T^1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 5 при $s = \left[\frac{n+m+k}{2} \right]$ ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_p^2(\tau) \lambda_p^{\left[\frac{n+m+k}{2}\right]+1}$$

сходится для почти всех $t \in [0, T]$, в частности, для некоторого $t_0 \in [0, T]$. Применяя к (21) неравенство Коши – Буняковского

$$\sum_{p=1}^{\infty} |f_p(t)v_p(x)| \leq \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} v_p^2 \lambda_p^{-\left[\frac{n-m-k}{2}\right]-1} \sum_{p=1}^{\infty} f_p^2(t) \lambda_p^{\left[\frac{n-m+k}{2}\right]+1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

и учитывая равномерную сходимость в Ω^1 первого из рядов в правой части (22), получим сходимость почти всюду в $[0, T]$ ряда (21), в частности, для $t_0 \in [0, T]$. Из леммы 4, примененной к $f_t(x, t)$, предельным переходом под знаком интеграла Лебега следует сходимость ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_0^T F_p^2(\tau) d\tau \lambda_p^{\left[\frac{n-m-k}{2}\right]+1},$$

где $F_p(\tau)$ – коэффициент Фурье функции $f_t(x, t)$. Как и выше, применяя неравенство Коши – Буняковского, покажем равномерную сходимость в $\overline{Q_T^1}$ ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} v_p(x) \int_0^T F_p(\tau) d\tau. \quad (3.23)$$

Пусть $\tilde{\psi}(t)$ непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$, равная нулю вблизи $t = 0$ и $t = T$, $v_{jp}(x)$ – последовательность непрерывно дифференцируемых в Ω^1 функций, равных нулю вблизи Γ^1 , сходящихся в норме пространства $H_{k,1}^1(\Omega^1)$ к собственной функции $v_p(x)$. Тогда для $\psi(x, t) = \tilde{\psi}(t)v_{jp}(x) \in C^1(Q_T^1)$ справедливо тождество

$$\int_{\Omega^1} \int_0^T f(x, t)v_{jp}(x) \frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt} y^k dt dx = \int_{\Omega^1} \int_0^T f_t(x, t)v_{jp}(x)\tilde{\psi}(t) y^k dt dx.$$

Применяя теорему Фубини и переходя к пределу при $j \rightarrow 0$, получим равенство

$$\int_0^T f_p(t) \frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt} dt = \int_0^T F_p(t)\tilde{\psi}(t) dt.$$

Отсюда следует, что $F_p(t)$ – обобщенная производная функции $f_p(t)$ на $[0, T]$. Поскольку $f_p(t)$ непрерывна на $[0, T]$, то

$$\int_{t_0}^t F_p(\tau) d\tau = f_p(t) - f_p(t_0)$$

или

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_p(t)v_p(x) - \sum_{p=1}^{\infty} f_p(t_0)v_p(x) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x) \int_{t_0}^t F_p(\tau) d\tau.$$

В силу равномерной сходимости ряда (23) отсюда следует равномерная сходимость в $\overline{Q_T^+}$ ряда (21).

Т е о р е м а 2. Если коэффициенты операторов L_{φ} , $\varphi(x) = f(x, t)$ и удовлетворяют условиям леммы 5, то относительно суммы ряда (5) и рядов, полученных почленным дифференцированием ряда (5), справедливы утверждения теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} v_p(x) \int_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p(t-\tau)} d\tau$$

является классическим решением задачи (1)–(3), в которой $\varphi \equiv 0$. Имеем

$$U_t = \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x) f_p(t) - \sum_{p=1}^{\infty} v_p(x) \lambda_p \int_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p(t-\tau)} d\tau. \quad (3.24)$$

В силу леммы 7 первый ряд (24) сходится в $\overline{Q_T^+}$. Учитывая оценку

$$\left[\int_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p(t-\tau)} d\tau \right]^2 \leq \int_0^t e^{-2\lambda_p(t-\tau)} d\tau \int_0^t f_p^2(\tau) d\tau \leq \frac{1}{2\lambda_p} \int_0^t f_p^2(\tau) d\tau$$

и применяя ко второму ряду в (24) неравенство Коши–Буняковского, получим:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| v_p(x) \lambda_p \int_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p(t-\tau)} d\tau \right| \leq \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} v_p^2 \lambda_p^{-[\frac{n+m+k}{2}]-1} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^t f_p^2(\tau) d\tau \lambda_p^{[\frac{n+m+k}{2}]+2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.25)$$

Равномерная сходимость первого ряда в (25) установлена в [4], сходимость второго ряда в (25) следует из леммы 5. К ряду

$$U_{Byi} = \sum_{p=1}^{\infty} By_i v_p(x) \int_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p(t-\tau)} d\tau$$

применим неравенство Коши–Буняковского

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| By_i v_p(x) \int_0^t f_p(\tau) e^{-\lambda_p(t-\tau)} d\tau \right| \leq \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (By_i v_p(x))^2 \lambda_p^{-[\frac{n+m+k}{2}]-3} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^t f_p^2(\tau) d\tau \lambda_p^{[\frac{n+m+k}{2}]+2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу равномерной сходимости второго ряда в (21) в произвольной подобласти $\overline{\Omega_1^+} \subset \Omega^+$ и леммы 5 вытекает равномерная сходимость в $\overline{Q_1^+} \subset Q_T^+$ ряда U_{Byi} . Аналогично устанавливается равномерная сходимость в $\overline{Q_1^+}$ ряда U_{xixj} .

З а м е ч а н и е 1. В условиях леммы 6 справедливы утверждения теорем 1 и 2.

З а м е ч а н и е 2. Ограничение $c(x) \leq 0$ в лемме 5 можно снять. В случае $c(x) > 0$ замена $u(x, t) \rightarrow v(x, t)e^{\alpha t}$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} - L_y v = f(x, t)e^{-\alpha t},$$

в котором коэффициент $\tilde{c}(x) = -\alpha + c(x)$ в силу непрерывности $c(x)$ на $\overline{\Omega^+}$ отрицателен при достаточно большой постоянной $\alpha > 0$.

Автор выражает благодарность Т.Д. Воробьевой и М.В. Борзовой за внимание к работе и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И.А.* О краевых задачах для уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // ДАН СССР. 1964. Т. 158. № 2. С. 275-278.
2. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. Пг. 1922. Т. 1.
3. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15. Вып. 2. С. 97-154.
4. *Сазонов А.Ю.* О классическом решении смешанной задачи для сингулярного параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 8.
5. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
6. *Сазонов А.Ю., Фомичева Ю.Г.* О разрешимости смешанной задачи для гиперболического уравнения, содержащего оператор Бесселя по части пространственных переменных // Междунар. конф. "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск: Октябрь, 2008.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-00877, № 14-01-97504).

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Sazonov A.Yu.

ON CLASSICAL SOLUTION OF MIXED PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION CONTAINING BESSEL OPERATOR ON SOME SPACE VARIABLES

The work derives the sufficient conditions on the area boundary, the operator coefficients, the right-hand side, and the initial function, under which the Fourier series is a classical solution of the mixed problem for a second order parabolic equation containing the Bessel operator on some space variables.

Key words: Bessel operator; mixed problem; parabolic equation.

Сазонов Анатолий Юрьевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Sazonov Anatoly Yuryevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Algebra and Geometry Department, e-mail: aib@tsu.tmb.ru