УДК 517.911

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© **О. В. Скопинцева**

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с с импульсными воздействиями, краевая задача.

Рассматривается дифференциальное уравнение с импульсными воздействиями, происходящими в точках пересечения траекторией заданной линии. Получены условия разрешимости апериодической краевой задачи. Используется представление краевой задачи в виде операторного уравнения в пространстве кусочно абсолютно непрерывных функций со специально построенной метрикой.

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — множество действительных чисел, C — пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$; L_∞ — пространство измеримых существенно ограниченных функций (классов эквивалентности) $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ с нормой $\|y\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai\,sup}_{s\in[a,b]}|y(s)|$; AC_∞ пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}$, имеющих существенно ограниченную производную $\dot{x}\in L_\infty$, с нормой $\|x\|_{L_\infty} = |x(a)| + \|\dot{x}\|_{L_\infty}$.

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием широко применяются при описании процессов, в которых возможны мгновенные или очень быстрые изменения состояний. Основы теории таких уравнений изложены в [1]. В работах [2]–[4] используется несколько иной подход к исследованию дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями, основанный на сведении к операторному уравнению в соответствующем функциональном метрическом пространстве. Ранее аналогичные идеи применялись в случае импульсных воздействий в фиксированные моменты времени [5],[6]. Для рассмотрения ситуации, когда "удары по траектории" возможны в любые моменты времени, например, на заданной линии в расширенном фазовом пространстве, в [2]–[4] предложена метрика для пространства функций, терпящих не более одного разрыва в любой точке, что позволило получить условия непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий, правой части уравнения, величины импульсного воздействия и линии, на которой оно происходит. Здесь используется аналогичная идея, основанная на сведении к операторному уравнению в соответствующем функциональном метрическом пространстве, для исследования разрешимости краевых задач.

Пусть $\chi_\tau(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t\in[a,\tau], \\ 1, & \text{если } t\in(\tau,b]. \end{cases}$ Определим пространство

$$S = \{x_{\tau,s}:[a,b]\to R,\ x_{\tau,s}(t) = s\chi_\tau(t) \mid \tau\in[a,b),\ s\in\mathbb{R}\}$$

с метрикой $\rho_S(x_{\tau_1,s_1},x_{\tau_2,s_2}) = \int\limits_a^b |x_{\tau_1,s_1}(t) - x_{\tau_2,s_2}(t)|dt$. Теперь определим пространства SC, SAC_∞ функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}$, каждая из которых может иметь разрыв не более чем в одной любой точке $\tau\in[a,b)$, где непрерывна слева и имеет предел справа. Любой элемент $x\in SC$ представим в виде $x = \tilde{x} + x_{\tau,s}$, где $\tilde{x}\in C$, $x_{\tau,s}\in S$. Соответственно, элемент $x\in SAC_\infty$ можно задать в виде такой же суммы двух функций, где $\tilde{x}\in AC_\infty$. Метрики в этих пространствах определим равенствами

$$\rho_{SC}(x_1,x_2) = \max\{\|\tilde{x_1}-\tilde{x_2}\|_C;\ \rho_S(x_{\tau_1,s_1},x_{\tau_2,s_2})\},\quad \rho_{SAC_\infty}(x_1,x_2) = \max\{\|\tilde{x_1}-\tilde{x_2}\|_{AC_\infty};\ \rho_S(x_{\tau_1,s_1},x_{\tau_2,s_2})\}.$$

Лемма. *SC, SAC_∞ — полные метрические пространства.*

Пусть заданы удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, непрерывные функции $g:\mathbb{R}\to[a,b]$, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ и числа A,B,C. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=f(t,x),\quad t\in[a,b],\tag{1}$$

испытывающее импульсные воздействия

$$\triangle x\,|_{t=g(x)}\doteq x(t+0)-x(t)=\varphi(t),\tag{2}$$

с краевым условием

$$Ax(a)+Bx(b)=C.\tag{3}$$

Мы получим условия, при которых решение импульсной дифференциальной системы (1), (2) испытает не более одного "удара". Тогда решением x будет функция, терпящая не более одного разрыва первого рода в точке $\tau:\ \tau=g\big(x(\tau)\big)$, абсолютно непрерывная на каждом из промежутков $[a,\tau]$, $(\tau,b]$, имеющая существенно ограниченную производную $\dot{x}\in L_\infty$. Таким образом, решение — элемент пространства SAC_∞, и для решения $x\in SAC_\infty$ имеет место представление

$$x(t)=x(a)+\varphi(\tau)\chi_\tau(t)+\int\limits_a^t\dot{x}(s)ds.$$

Следовательно, краевую задачу (1)-(3) можно считать системой двух уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f\big(t,x(a)+\varphi(\tau)\chi_\tau(t)+\int\limits_a^t\dot{x}(s)ds\big),\quad t\in[a,b],\\ (A+B)x(a)+B\varphi(\tau)+B\int\limits_a^b\dot{x}(s)ds=C,\end{cases}$$

$$\text{где }\tau:\ \tau=g\big(x(a)+\int\limits_a^\tau\dot{x}(s)ds\big),$$

относительно пары неизвестных $\big(\dot{x},x(a)\big)\in L_\infty\times\mathbb{R}$. К исследованию разрешимости полученной системы теперь можно применить теорему Банаха о сжимающем отображении. Таким образом получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть существуют такие положительные числа M, Φ, что имеют место оценки $|f(t,x)|\le M$, $|\varphi(t)|\le\Phi$ при любых $x\in R$ и почти всех $t\in[a,b]$. Пусть, далее, существуют такие константы L, K, N, что*

$$L(b-a)\Big(1+\frac{K}{1-KM}(\Phi+N(b-a))\Big)<1,$$

$$\Big|\frac{B}{A+B}\Big|<\frac{1-L(b-a)(1+\frac{K}{1-KM}(\Phi+N(b-a)))}{\frac{KN}{1-KM}+L(b-a)(1+\frac{K}{1-KM}(\Phi+N(b-a)))}$$

и выполнены неравенства:

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le L|x_1-x_2|\quad\dot{\forall}t\in[a,b],\quad\forall x_1,x_2\in R;$$

$$|g(x_1)-g(x_2))|\le K|x_1-x_2|\quad\forall x_1,x_2\in R;$$

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2))|\le N|t_1-t_2|\quad\forall t_1,t_2\in[a,b].$$

Тогда задача (1) имеет единственное решение $x\in SAC_\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Самойленко, Н. А. Перестюк.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк. 1987.

2. *Е.С. Жуковский,О.В. Скопинцева.* О корректности дифференциального уравнения, испытывающего импульсные воздействия на заданной линии. // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2012. Т. 17. № 1. С. 45-48.

3. *Е.С. Жуковский, Б.Д. Пеньков, О.В. Скопинцева.* Об одном подходе к исследованию дифференциальных уравнений, подвергающихся импульсным воздействиям в нефиксированные моменты времени // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. Вып. 3. С. 735-737.

4. *О.В. Скопинцева.* Непрерывная зависимость от параметров решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Вестник Тамбовского университета. Исследовательские проекты студентов. Приложение к журналу. Тамбов, 2011. С. 207-210.

5. *Н.В. Азбелев, В.П.Максимов, Л.Ф. Рахматуллина.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1991. 280с.

6. *А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина, О.В. Филиппова* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части 1-6 // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2009. Т. 14. № 6-2. С. 1275-1318.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках программы "Развитие деятельности студенческих объединений".

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Skopintseva O.V.

ON SOLVABILITY OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSES

A differential equation with impulses that place at the points of intersection of the trajectory by the given line is considered. The existence conditions for an a-periodic boundary-value problem are derived. The presentation of a boundary-value problem in the from of an operator equation in the space of piecewise absolutely continuous function with a specific metric is used.

Key words: differential equation with impulses; boundary-value problem.

Скопинцева Олеся Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант по направлению подготовки "прикладная математика"Института математики, физики и информатики, e-mail: tuch_89@mail.ru

Skopintseva Olesya Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, master of Institute of Mathematics, Physics and Computer Sciences in the Specialty «Applied Mathematics», e-mail: tuch_89@mail.ru