УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© **В. С. Трещёв**

Ключевые слова: накрывающие отображения; дифференциальное уравнение неявного вида с отклоняющимся аргументом; краевая задача.

Получены условия разрешимости апериодической краевой задачи для дифференциального уравнения неявного вида с отклоняющимся аргументом. Используется метод исследования краевых задач, основанный на утверждениях о векторных накрывающих отображениях.

Используются следующие обозначения для пространств определенных на $[a,b]$ вещественных функций: L_∞ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций с нормой $||x||_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$; AC_∞ — банахово пространство таких абсолютно непрерывных функций, что $\dot{x} \in L_\infty$, с нормой $||x||_{AC_\infty} = ||\dot{x}||_{L_\infty} + |x(a)|$; C — пространство непрерывных функций, $||x||_C = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$; B^n – декартово произведение множеств $B \times \ldots \times B$.

В работах [1]–[3] предложен метод исследования неявных дифференциальных уравнений, основанный на утверждениях о накрывающих отображениях. Использованные идеи и подходы применимы и к функционально-дифференциальным уравнениям неявного вида. В частности, утверждения о векторных накрывающих отображениях [3] позволяют исследовать краевые задачи для таких уравнений. Здесь получены условия разрешимости апериодической краевой задачи для дифференциального уравнения неявного вида с отклоняющимся аргументом.

Пусть X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, соответственно. Будем использовать следующее определение.

О п р е д е л е н и е [4]. Отображение $F : X \to Y$ называется α-накрывающим, $\alpha > 0$, если для любых $x_0 \in X, y \in Y$ существует $x \in X$, удовлетворяющий уравнению $F(x) = y$ и оценке

$$\rho_X(x, x_0) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, F(x_0)).$$

Пусть заданы измеримая функция $h : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и функция $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям Каратеодори (т. е. измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов). Будем предполагать, что для любого $r > 0$ найдется такое число M, что при любых $x, w \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих оценке $|x| + |w| \leq r$, и при почти всех $t \in [a,b]$ имеет место неравенство $|f(t,x,w)| \leq M$. Далее, пусть для любого $i = \overline{1,n}$ заданы числа A_i, B_i, Δ_i, измеримые существенно ограниченные функции $y_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ и измеримые по Борелю ограниченные функции $\varphi_i : (-\infty, a) \bigcup (b, \infty) \to \mathbb{R}$. Исследуем систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i\Big(t, x_1(h_{i1}(t)), \ldots, x_n(h_{in}(t)), \dot{x}_i(t)\Big) = y_i(t),\ t \in [a,b];\ x_i(s) = \varphi_i(s),\ \text{если } s \notin [a,b], \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$A_i x_i(a) + B_i x_i(b) = \Delta_i,\ i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Воспользуемся представлением краевой задачи $(1),(2)$, предложенным И.В. Азбелевым [5]. Для любых $i,j=\overline{1,n}$ определим множества

$$E_{ij}=h_{ij}^{-1}[a,b]=\{t\in[a,b]:h_{ij}(t)\in[a,b]\},$$

являющиеся, очевидно, измеримыми, и числа $H_{ij}=\operatorname*{vrai\,sup}\limits_{t\in E_{ij}}(h_{ij}(t)-a)$. Определим оператор $S_{h_{ij}}:C\to L_\infty$

$$(S_{h_{ij}}x)(t)=\begin{cases} x_i(h_{ij}(t)), & \text{если } t\in E_{ij},\\ \varphi_i(h_{ij}(t)), & \text{если } t\notin E_{ij},\end{cases}$$

и запишем систему $(1),(2)$ в следующем виде

$$\begin{cases} f_i\Big(t,S_{h_{i1}}\big(x_1(a)+\int\limits_a^{(\cdot)}\dot{x}_1(s)ds\big)(t),\dots,S_{h_{in}}\big(x_n(a)+\int\limits_a^{(\cdot)}\dot{x}_n(s)ds\big)(t),\dot{x}_i(t)\Big)=y_i(t), \quad t\in[a,b],\\ (A_i+B_i)x_i(a)+B_i\int\limits_a^b\dot{x}_i(s)ds=\Delta_i, \quad i=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{3}$$

Решением полученной системы естественно считать функцию, определенную на $[a,b]$. Мы будем искать решение в классе ${AC_\infty}^n$ – векторных функций, каждая компонента которых – элемент AC_∞. Любой $x\in{AC_\infty}^n$ однозначно определяется парой $(\dot{x},x(a))\in{L_\infty}^n\times\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы можем считать краевую задачу (3) системой $2n$ уравнений с двумя $2n$ неизвестными $\dot{x}_i\in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, $x_i(a)\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть для всех $i=\overline{1,n}$ выполнены следующие условия: $A_i+B_i\neq 0$, существует такое $\alpha_i>0$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и любом $x\in\mathbb{R}^n$ отображение $f_i(t,x,\cdot):\mathbb{R}\to\to\mathbb{R}$ является α_i-накрывающим; для любого $j=\overline{1,n}$ существует такое $\beta_{ij}\geq 0$, что при почти всех $t\in E_{ij}$ и любом $w\in\mathbb{R},(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$ отображение $f_i(t,x_1,\dots\dots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\dots,x_n,w):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является β_{ij}-липшицевым. Тогда, если матрица*

$$C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix},$$

$$C_{11}=\big(\alpha_i^{-1}\beta_{ij}H_{ij}\big)_{n\times n}, \qquad C_{12}=\big(\alpha_i^{-1}\beta_{ij}\big)_{n\times n}, \tag{4}$$

$$C_{21}=\operatorname{diag}\big\{|A_i+B_i|^{-1}|B_i|(b-a)\big\}_{n\times n}, \quad C_{22}=(0)_{n\times n},$$

имеет спектральный радиус $\varrho(C)<1$, то существует решение $x\in{AC_\infty}^n$ краевой задачи (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на результатах о векторных накрывающих отображениях [3].

Определим для $i=\overline{1,n}$ отображения $\Phi_i:L_\infty\times{L_\infty}^n\times\mathbb{R}^n\to L_\infty$, $\phi_i:\mathbb{R}\times{L_\infty}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ соотношениями

$$\Big(\Phi_i\big(u_i,v_1,\dots,v_n,v_{n+1},\dots,v_{2n}\big)\Big)(t)=$$

$$=f_i\Big(t,S_{h_{i1}}\big(v_{n+1}+\int\limits_a^{(\cdot)}v_1(s)ds\big)(t),\dots,S_{h_{in}}\big(v_{2n}+\int\limits_a^{(\cdot)}v_n(s)ds\big)(t),u_i(t)\Big);$$

$$\Big(\phi_i\big(u_{i+n},v_1,\dots,v_n,v_{n+1},\dots,v_{2n}\big)\Big)(t)=(A_i+B_i)u_{i+n}+B_i\int\limits_a^b v_i(s)ds.$$

Теперь запишем краевую задачу (3) в виде системы операторных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_i(\dot{x}_i,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,x_1(a),\ldots,x_n(a))=y_i,\\ \phi_i(x_i(a),\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,x_1(a),\ldots,x_n(a))=\Delta_i. \end{array}\right. \tag{5}$$

К исследованию полученной системы (5) применим [3, теорема 1]. В силу [3, теорема 3] отображение $\Phi_i(\cdot,v_1,\ldots,v_n,v_{n+1},\ldots,v_{2n}):L_\infty\to L_\infty$ является α_i-накрывающим. Далее, для произвольного $j=\overline{1,n}$ и любых $v_j,\widetilde{v}_j\in L_\infty$ выполнено

$$\Big|\Big|\Big(\Phi_i\big(u_i,v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_n,v_{n+1},\ldots,v_{2n}\big)-\Phi_i\big(u_i,v_1,\ldots,\widetilde{v}_j,\ldots,v_n,v_{n+1},\ldots,v_{2n}\big)\Big)\Big|\Big|_{L_\infty}\leq$$

$$\leq\beta_{ij}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in E_{ij}}\Big(S_{h_{ij}}\Big(\int\limits_a^{(\cdot)}|v_j(s)-\widetilde{v}_j(s)|ds\Big)\Big)(t)\leq\beta_{ij}||v_j-\widetilde{v}_j||_{L_\infty}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in E_{ij}}(h_{ij}(t)-a)$$

$$=\beta_{ij}H_{ij}||v_j-\widetilde{v}_j||_{L_\infty}.$$

Таким образом, отображение $\Phi_i(u_i,v_1,\ldots,v_{j-1},\cdot,v_{j+1},v_n,v_{n+1},\ldots,v_{2n}):L_\infty\to L_\infty$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\widetilde{\beta}_{ij}\doteq\beta_{ij}H_{ij}$.

Аналогично, при всех $j=\overline{n+1,2n}$ отображение $\Phi_i(u_i,v_1,\ldots,v_n,v_{n+1},\ldots,v_{j-1},\cdot,v_{j+1},\ldots$ $\ldots,v_{2n}):\mathbb{R}\to L_\infty$ является β_{ij}-липшицевым ($\widetilde{\beta}_{ij}=\beta_{ij}$).

Также легко проверяется, что функционал ϕ_i по первому аргументу $\phi_i(\cdot,v_1,\ldots,v_n,v_{n+1},\ldots$ $\ldots,v_{2n}):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является $|A_i+B_i|$-накрывающим; не зависит от остальных аргументов кроме v_i, и по этому аргументу функционал $\phi_i(u_{i+n},v_1,\ldots,v_{i-1},\cdot,v_{i+1},\ldots,v_n,v_{n+1},\ldots,v_{2n}):L_\infty\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\widetilde{\beta}_{ij}=|B_i|(b-a)$.

Согласно [3, теорема 1], для доказательства утверждения остается заметить, что матрица $(\alpha_i^{-1}\widetilde{\beta}_{ij})_{2n\times 2n}$ — это матрица C, которая определяется формулами (4), и ее спектральный радиус $\varrho(C)<1$. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай краевой задачи (1), (2) — апериодическую краевую задачу для скалярного уравнения с отклоняющимся аргументом. Пусть заданы измеримая функция $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ и функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори. Предполагается, что для любого $r>0$ существует такое число M, что при любых $x,w\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих оценке $|x|+|w|\leq r$, и при почти всех $t\in[a,b]$ имеет место неравенство $|f(t,x,w)|\leq M$. Далее, пусть заданы числа A,B,Δ, измеримая существенно ограниченная функция $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ и измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi:(-\infty,a)\bigcup(b,\infty)\to\mathbb{R}$. Используя теорему 1, сформулируем условия разрешимости краевой задачи

$$\left\{\begin{array}{c} f(t,x(h(t)),\dot{x}(t))=y(t),\quad t\in[a,b],\\ x(s)=\varphi(s),\ \text{если } s\notin[a,b],\\ Ax(a)+Bx(b)=\Delta. \end{array}\right. \tag{6}$$

Определим измеримое множество

$$E=h^{-1}[a,b]=\{t\in[a,b]:h(t)\in[a,b]\}$$

и число $H=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in E}(h(t)-a)$. Для системы (6) матрица C имеет вид

$$C=(\alpha_i{}^{-1}\widetilde{\beta}_{ij})_{2\times 2}=\begin{pmatrix}\alpha^{-1}\beta H & \alpha^{-1}\beta\\ |A+B|^{-1}|B|(b-a) & 0\end{pmatrix};$$

её характеристический многочлен

$$\chi(\lambda)=\lambda^2-\alpha^{-1}\beta H\lambda-\alpha^{-1}|A+B|^{-1}\beta|B|(b-a)=0,$$

согласно теореме Виета, имеет два действительных корня разных знаков $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, причем $\lambda_2 > |\lambda_1|$, и поэтому $\varrho(C) \quad \lambda_2$. Таким образом, оценка спектрального радиуса $\varrho(C) < 1$ выполнена тогда и только тогда, когда $\chi(1) > 0$.

Итак, из теоремы 1 следует, что при выполнении неравенства

$$1 - \frac{\beta H}{\alpha} - \frac{\beta |B|(b-a)}{|A+B|\alpha} > 0$$

краевая задача (6) будет разрешимой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.
2. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523-1537.
3. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439-456.
4. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.
5. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-00877, № 14-01-97504).

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Treshchev V.S.

SOLVABILITY OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENT

Conditions of solvability of an a-periodic boundary-value problem for an implicit differential equation with deviating argument are derived. The method based on the statements about vector covering mappings due to E.S. Zhukovskiy and E.A. Pluzhnikova is used.

Key words: covering mappings; implicit differential equation with deviating argument; boundary-value problem.

Трещёв Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра алгебры и геометрии, e-mail: SirValentino@yandex.ru

Treshchev Valentin Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Postgraduate Student, Algebra and Geometry Department, e-mail: SirValentino@yandex.ru