

УДК 517.965, 517.929.7

ОБОБЩЕННЫЕ КВАЗИРЕШЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С НЕВЫПУКЛОЙ ПО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© О. В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; обобщенное решение; обобщенное квазирешение.

Вводятся понятия обобщенного решения и обобщенного квазирешения задачи Коши для импульсного функционально-дифференциального включения с невыпуклой по переключению правой частью, с импульсными воздействиями. Сформулировано основное свойство обобщенных квазирешений, когда множество решений «овыпуклостой» задачи Коши совпадает с множеством обобщенных квазирешений.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n -мерное пространство вектор-столбцов, с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathbf{L}^n[a, b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a, b]} = \int_a^b |x(s)| ds$; $\mathbf{L}_+^1[a, b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\mathbf{L}^1[a, b]$; $Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ – множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$; $\text{Sw}(\mathbf{L}^n[a, b])$ – множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$; $\Omega(\text{Sw}(\mathbf{L}^n[a, b]))$ – множество всех выпуклых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Пусть $t_k \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m}$, $(t_1 < \dots < t_m)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ пространство непрерывных на каждом промежутке $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, b]$ функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = \overline{1, m}$, с нормой $\|x\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)|: t \in [a, b]\}$; $\tilde{\mathbf{C}}_+^1[a, b]$ – множество неотрицательных функций пространства $\tilde{\mathbf{C}}^1[a, b]$.

Для функционально-дифференциального включения, не обладающего свойством выпуклости по переключению значений, рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in \Phi(x), \\ \Delta(x(t_k)) &= I_k(x(t_k)), \quad k = \overline{1, m}, \\ x(a) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где отображение $\Phi: \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией и найдется такое непрерывное и симметричное отображение $P: \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_+^1[a, b]$, что для любых $x, y \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется оценка $h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leq \|P(x, y)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}$; отображения $I_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = \overline{1, m}$.

Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$. Выпуклой по переключению оболочкой $\text{sw}\Phi$ множества Φ называется совокупность всех элементов вида $y = \sum_{i=1}^l \chi(\mathcal{U}_i)x_i$, где $x_i \in \Phi$, l – любое натуральное число, а произвольные измеримые множества $\mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, l}$,

осуществляют разбиение отрезка $[a, b]$, т. е. $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^l \mathcal{U}_i = [a, b]$; $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция. Пусть далее, $\overline{sw}\Phi$ – замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $L^n[a, b]$.

О п р е д е л е н и е 1. Под *обобщенным решением задачи* (3.1) понимается функция $x \in \tilde{C}^n[a, b]$, для которой существует такое $q \in \overline{sw}\Phi(x)$, что при всех $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m I_k(x(t_k))\chi_{(t_k, b]}(t). \quad (3.2)$$

Данное определение отличается от определения обобщенного решения, введенного А.Ф. Филипповым для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью (см. [1]). Здесь обобщенное решение определяется с помощью выпуклой по переключению оболочки множества значений отображения $\Phi: \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow Q(L^n[a, b])$ (которое, вообще говоря, не обладает свойством выпуклости по переключению значений). При этом, если $\Phi(x)$ является выпуклым по переключению, то $\overline{sw}\Phi(x) = \Phi(x)$, и тогда обобщенное решение совпадает с «классическим».

Для задачи (3.1) в [2] получены условия существования обобщенного решения, доказано, что локальное обобщенное решение продолжаемо до "максимального". Эти результаты удовлетворяют одному из требований к обобщенным решениям дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, сформулированных в монографии А.Ф. Филиппова [1]: "решение не должно прерываться".

Применительно к задаче (3.1) определение квазирешения можно сформулировать следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что функция $y \in \tilde{C}^n[a, b]$, имеющая представление

$$y(t) = x_0 + \int_a^t \tilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k))\chi_{(t_k, b]}(t), \quad t \in [a, b], \quad (3.3)$$

является *обобщенным квазирешением задачи* (3.1), если найдется такая последовательность $x_i \in \tilde{C}^n[a, b]$, $i = 1, 2, \dots$, что для каждой функции x_i , $i = 1, 2, \dots$ найдется функция $q_i \in \overline{sw}\Phi(y)$, для которой при любом $t \in [a, b]$ имеет место равенство

$$x_i(t) = x_0 + \int_a^t q_i(s)ds + \sum_{k=1}^m I_k(x_i(t_k))\chi_{(t_k, b]}(t), \quad (3.4)$$

где $x_i \rightarrow y$ в пространстве $\tilde{C}^n[a, b]$.

Отметим, что понятие квазирешения впервые было введено Важевским (Г. Wazewski) (см. [1]) для обыкновенного дифференциального включения и играет фундаментальную роль в изучении свойств решений функционально-дифференциальных включений с невыпуклой правой частью. Отметим также, что если множество $\Phi(x)$ в определении обобщенного квазирешения выпукло по переключению, то обобщенное квазирешение совпадает с квазирешением, введенным в работах [2], [3], [4].

Пусть $\mathcal{H}(x_0)$ – множество всех обобщенных квазирешений задачи (3.1).

Определим отображение $\tilde{\Phi}_{co}: \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \Omega(\text{Sw}(L^n[a, b]))$ равенством

$$\tilde{\Phi}_{co}(x) = \overline{co}(\overline{sw}\Phi(x)). \quad (3.5)$$

Оператор $\tilde{\Phi}_{co}: \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \Omega(\text{Sw}(L^n[a, b]))$ будем называть *обобщенно выпукленным оператором*.

Рассмотрим «овыпукленную» задачу

$$\dot{x} \in \tilde{\Phi}_{co}(x), \quad \Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \quad x(a) = x_0. \quad (3.6)$$

Пусть $\Pi_{co}(x_0, b)$ – множество всех решений задачи (3.6) на отрезке $[a, b]$.

Т е о р е м а. Справедливо равенство $\mathcal{H}(x_0) = \Pi_{co}(x_0, b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале докажем включение

$$\mathcal{H}(x_0) \subset \Pi_{co}(x_0, b). \quad (3.7)$$

Пусть $y \in \mathcal{H}(x_0)$ и пусть $y \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ имеет представление (3.3), в котором $y(a) = x_0$. Тогда, согласно определению обобщенного квазирешения задачи (3.1), найдется такая последовательность $x_i \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, $i = 1, 2, \dots$, что для каждой функции x_i , $i = 1, 2, \dots$ найдется функция $q_i \in \tilde{\Phi}(y)$, для которой при любом $t \in [a, b]$ имеет место равенство (3.4). Так как $x_i \rightarrow y$ в пространстве $\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$, а отображения $I_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$ непрерывны, то при любом $t \in [a, b]$ справедливо равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m I_k(x_i(t_k)) \chi_{(t_k, b]}(t) = \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k)) \chi_{(t_k, b]}(t). \quad (3.8)$$

Из равенства (3.8) следует, что при любом $t \in [a, b]$ имеет место соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^t q_i(s) ds = \int_a^t \tilde{q}(s) ds, \quad (3.9)$$

где для каждого $i = 1, 2, \dots$ функция $q_i \in \tilde{\Phi}(y)$ удовлетворяет представлению (3.4), а функция $\tilde{q}$ удовлетворяет равенству (3.3), в котором $y(a) = x_0$.

Далее покажем, что $q_i \rightarrow \tilde{q}$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как множество $\tilde{\Phi}(y)$ ограничено суммируемой функцией, то для доказательства слабой сходимости достаточно показать, что для каждого измеримого по Лебегу множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ имеет место равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{U}} q_i(s) ds = \int_{\mathcal{U}} \tilde{q}(s) ds. \quad (3.10)$$

Докажем равенство (3.10). Из аддитивности интеграла и равенства (3.9) следует, что для любых $t, \tau \in [a, b]$ справедливо соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\tau}^t q_i(s) ds = \int_{\tau}^t \tilde{q}(s) ds. \quad (3.11)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть функция $\beta \in \mathbf{L}^n[a, b]$ такова, что при любых $z \in \Phi(y)$ и при почти всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|z(t)| \leq \beta(t). \quad (3.12)$$

Не уменьшая общности, далее будем считать, что и функция $\tilde{q}$ из представления (3.3) удовлетворяет неравенству (3.12). Далее, пусть $\delta > 0$ таково, что при всех измеримых множествах $\mathcal{E} \subset [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $\mu(\mathcal{E}) < \delta$, выполняется неравенство

$$\int_{\mathcal{E}} \beta(s) ds < \varepsilon. \quad (3.13)$$

Далее пусть $\mathcal{U} \subset (a, b)$ — измеримое множество и $\tilde{\mathcal{U}} \subset (a, b)$ — такое открытое множество, что $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{U}}$ и $\mu(\tilde{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}) < \delta$. Далее пусть

$$\tilde{\mathcal{U}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) = \tilde{\mathcal{U}}_1 \cup \tilde{\mathcal{U}}_2,$$

где (a_i, b_i) , $i = 1, 2, \dots$ — составляющие открытые интервалы множества $\mathcal{U} \subset (a, b)$,

$$\tilde{\mathcal{U}}_1 = \bigcup_{i=1}^p (a_i, b_i), \quad \tilde{\mathcal{U}}_2 = \bigcup_{i=p+1}^{\infty} (a_i, b_i),$$

причем p выбрано так, что $\mu(\tilde{\mathcal{U}}_2) < \delta$. В силу равенства (3.11) выберем $N = 1, 2, \dots$ таким, что при всех $i \geq N$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{\tilde{\mathcal{U}}_1} q_i(s) ds - \int_{\tilde{\mathcal{U}}_1} q(s) ds \right| < \varepsilon. \quad (3.14)$$

Так как для любого $i = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$\int_{\mathcal{U}} (q_i(s) - q(s)) ds = \int_{\tilde{\mathcal{U}}} (q_i(s) - q(s)) ds - \int_{\tilde{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}} (q_i(s) - q(s)) ds,$$

то для любого $i = 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\mathcal{U}} (q_i(s) - q(s)) ds \right| \leq \left| \int_{\tilde{\mathcal{U}}_1} (q_i(s) - q(s)) ds \right| + \left| \int_{\tilde{\mathcal{U}}_2} (q_i(s) - q(s)) ds \right| + \left| \int_{\tilde{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}} (q_i(s) - q(s)) ds \right|.$$

Так как для функции $\beta \in L^n[a, b]$ выполняется неравенство (3.12), то получаем оценку

$$\left| \int_{\mathcal{U}} (q_i(s) - q(s)) ds \right| \leq \left| \int_{\tilde{\mathcal{U}}_1} (q_i(s) - q(s)) ds \right| + 2 \int_{\tilde{\mathcal{U}}_2} \beta(s) ds + 2 \int_{\tilde{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}} \beta(s) ds.$$

Отсюда в силу неравенств (3.13), (3.14) для любого $i \geq N$ получаем оценку

$$\left| \int_{\mathcal{U}} (q_i(s) - q(s)) ds \right| < 5\varepsilon.$$

Таким образом, для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ справедливо равенство (3.10). Следовательно, $q_i \rightarrow q$ слабо в пространстве $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как выпуклое замкнутое множество пространства замкнуто и в слабой топологии этого пространства, то из включения $q_i \in \overline{\text{co}}\tilde{\Phi}(y)$ вытекает включение $q \in \overline{\text{co}}\tilde{\Phi}(y)$. А это означает, что функция $y \in \tilde{C}^n[a, b]$, представимая в виде (3.3), является решением задачи (3.6), т. е. $y \in H_{\text{co}}(x_0, b)$. Следовательно, включение (3.7) справедливо.

Теперь докажем вложение

$$H_{\text{co}}(x_0, b) \subset \mathcal{H}(x_0). \quad (3.15)$$

Пусть $y \in H_{\text{co}}(x_0, b)$. Тогда функция $y \in \tilde{C}^n[a, b]$ представима в виде равенства (3.3), причем функция $q \in \overline{\text{co}}\tilde{\Phi}(y)$, $y(a) = x_0$. Так как множество $\tilde{\Phi}(y) \in \text{Sw}(L^n[a, b])$, то для функции q найдется такая последовательность $q_i \in \tilde{\Phi}(y)$, $i = 1, 2, \dots$, что $q_i \rightarrow q$ слабо в пространстве

$L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Далее, определим последовательность $x_i \in \tilde{C}^n[a, b]$, $i = 1, 2, \dots$ равенством (3.4). Так как $q_i \rightarrow q$ слабо в пространстве $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^t q_i(s) ds = \int_a^t q(s) ds$$

равномерно относительно $t \in [a, b]$. Поэтому в силу непрерывности отображений $I_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, получим равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i - y\|_{\tilde{C}^n[a, b]} = 0.$$

А это означает, что $y \in \mathcal{H}(x_0)$. Таким образом справедливо вложение (3.15). Из соотношений (3.7), (3.15) следует равенство $\mathcal{H}(x_0) = H_{co}(x_0, \tau)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Булгаков А.И., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями и оператором, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестник Тамбовского государственного университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. Вып. 6. С. 1617-1620.
3. Wazewski A. Sur une generalisation de la notion des solutions d'une equation au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys. 1962. V. 10. №1. P. 11-15.
4. Булгаков А.И., Булгакова О.П., Мачина А.П. Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика. 2005. № 1. С. 3-20.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Filippova O.V.

GENERALIZED QUASI-SOLUTION OF IMPULSIVE FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSION WITH DELAY AND WITH NON-DECOMPOSABLE RIGHT-HAND SIDE

Concepts of the generalized solution and the generalized quasi-solution of the Cauchy problem for a functional differential inclusion with impulses and with the right-hand side part not necessarily convex-valued with respect to switching are presented. The main property of generalized quasi-solution is formulated, namely, the set of solutions to the «convexified» Cauchy problem is equal to set of generalized quasi-solutions.

Key words: functional-differential inclusion; generalized solution; generalized quasi solution.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Senior Lecturer of Algebra and Geometry Department, e-mail: philippova.olga@rambler.ru