УДК 519.6

ЗАДАЧА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБХОДА МЕГАПОЛИСОВ

© А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов

Ключевые слова: маршрут; трасса; динамическое программирование; условия предшествования.

Рассматривается задача о посещении конечной системы мегаполисов с условиями предшествования; посещение мегаполисов сопровождается выполнением некоторых работ. Предполагается, что затраты на перемещения и выполняемые работы агрегируются аддитивно. Рассматривается вариант широко понимаемого динамического программирования, на основе которого конструируется оптимальный алгоритм, реализованный на ПЭВМ. Предлагается способ улучшения маршрута в задаче большой размерности посредством локальной беллмановской вставки с учетом условий предшествования.

Методы решения задач маршрутизации, разработанные в ИММ УрО РАН, неоднократно докладывались на конференциях, проводимых в Тамбове, в ТГУ им. Г.Р. Державина; одним из организаторов этих конференций был профессор Александр Иванович Булгаков, безвременно ушедший из жизни в 2013 г., но успевший многое сделать для организации очередной конференции. Работы Александра Ивановича хорошо знали и знают в Свердловске–Екатеринбурге; в них содержатся глубокие научные результаты и новые подходы к исследованию широко понимаемых задач управления. Он был энтузиастом математики, педагогом, организатором науки; ему удалось сделать очень многое для университета и всех математиков Тамбова. Светлой памяти Александра Ивановича Булгакова посвящается настоящая статья.

1. Введение

В статье рассматриваются задачи маршрутизации перемещений с ограничениями в виде условий предшествования; упомянутые условия возникают в различных задачах (демонтаж энергоблока АЭС, листовая резка деталей в машиностроении, морские и авиационные перевозки) и имеют смысл осуществления некоторых действий в строгой очередности «одно после другого». Разумеется, упомянутые задачи имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (ЗК), но содержат целый ряд принципиальных особенностей, связанных с приложениями. В связи с решением ЗК отметим работы [1–3]; отметим также исследования [4, 5], связанные с применением динамического программирования (ДП). В связи с ЗК особо отметим метод ветвей и границ [6]. В [1] рассматривались многочисленные задачи прикладного характера, в той или иной степени близкие к ЗК. Отметим [7, 8] в связи с «реальными», условиями предшествования в маршрутных задачах, а также [9] в связи с динамической ЗК.

В настоящей работе развивается подход [10], связанный с модификацией ДП, отвечающий решению задач о посещении мегаполисов (непустых конечных множеств) при условиях предшествования; монографии [10] предшествовал целый ряд журнальных статей [11–14]. Отметим [15], где отражено развитие упомянутого подхода для более общих задач маршрутизации (некоторые другие публикации будут указаны ниже). В настоящей статье упомянутые исследования продолжаются и связываются с идеей улучшения решения маршрутных задач большой размерности посредством вставки фрагментов с элементами ДП. Важную роль играют при этом условия предшествования, которые в [10,11] (и в ряде других работ) активно использовались для сокращения перебора. В данном случае речь идёт о выделении некоторой «части», этих условий для обработки на основе ДП и, напротив, о встраивании локально допустимых маршрутов в глобальное решение. Само исходное решение большой задачи (маршрут и трасса) может предварительно определяться тем или иным эвристическим методом и быть проанализировано затем с целью выделения неудачного фрагмента, после чего данный фрагмент предлагается заменить «частью», отвечающей идее широко понимаемого ДП. Будем именовать эту процедуру беллмановской вставкой, для которой стремимся (в целях ощутимого улучшения результата) к «охвату» значительного фрагмента первоначального решения. Поскольку реализация ДП связана с неизбежными затруднениями в вопросах вычислительной реализации, то при осуществлении упомянутого «охвата», предлагается в максимальной степени задействовать условия предшествования «большой» задачи, вырезая из них «часть», отвечающую заменяемому фрагменту первоначального решения, что требует, конечно, определенного согласования ограничений «большой» задачи и подобных по смыслу ограничений встраиваемой задачи.

2. Обозначения и определения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, связки, специальные символы: $\triangleq$ — равно по определению, $\emptyset$ — пустое множество; def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Для всяких объектов x и y (случай $x = y$ не исключается) через $\{x;y\}$ обозначаем множество, содержащее x,y и не содержащее никаких других элементов ($\{x;y\}$ — неупорядоченная пара объектов x,y). Если z — объект, то $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ есть одноэлементное множество, содержащее z. Если a и b — объекты, то [16, с. 67] $(a,b) \triangleq \{\{a\};\{a;b\}\}$ есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Для всякой УП z через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем, соответственно, первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$; если $z \in A \times B$, где A и B — множества, то $\mathrm{pr}_1(z) \in A$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in B$. Как обычно [17], для любых трёх объектов x,y и z полагаем $(x,y,z) \triangleq ((x,y),z)$. Кроме того, следуя [17], полагаем для любых трёх множеств A, B и C, что $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; при $p \in A \times B$ и $q \in C$ имеем, следовательно, свойство $(p,q) \in \in A \times B \times C$. Напомним, что [16] отношение есть подмножество (п/м) декартова произведения двух множеств, т. е. множество, состоящее из УП.

Для всякого множества T через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м T; $\mathrm{Fin}(T)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(T)$ (семейство всех непустых конечных п/м T).

В дальнейшем широко используется индексная форма записи отображений (см. [15]): если A и B — непустые множества и $b_a \in B \ \forall a \in A$, то $(b_a)_{a \in A}$ есть def такое отображение $f : A \to \to B$, что $f(\alpha) = b_\alpha \ \forall \alpha \in A$.

При обозначении функций двух и трёх переменных используем обычные правила экономии скобок, рассматривая УП и триплеты как аргументы соответствующих функций. Напомним в связи с вышеупомянутыми соглашениями, что при всяком выборе непустых множеств A, B, C и D, функции $f : A \times B \times C \to D$, а также точек $x \in A \times B$ и $y \in C$ определено значение $f(x,y) \in D$; это обстоятельство часто используется в дальнейших обозначениях.

Всюду в дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}, \mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$

и

$$\overline{k,l} \overset{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N}_o |\, (k \leqslant i) \,\&\, (i \leqslant l)\} \quad \forall k \in \mathbb{N}_o \quad \forall l \in \mathbb{N}_o \tag{2.1}$$

(в (2.1) допускается реализация $\emptyset$). Далее $[0,\infty[\overset{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} |\, 0 \leqslant \xi\}$; для каждого непустого множества S через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех функций из S в $[0,\infty[$.

Если A и B — непустые множества, а φ есть биекция [18, с. 87] множества A на B, то через φ^{-1} обозначаем биекцию B на A, обратную к φ. Перестановкой непустого множества L называется биекция L на себя (см. [18, с. 87]); каждой перестановке λ множества L сопоставляется, стало быть, обратная перестановка λ^{-1} (множества L), для которой $\lambda(\lambda^{-1}(l)) = \lambda^{-1}(\lambda(l)) = l \ \ \forall l \in L$. Непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность $|K| \in \mathbb{N}$, а также непустое конечное множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [18, с. 87] $\overline{1,|K|}$ на K; пусть $|\emptyset| \overset{\triangle}{=} 0$. В дальнейшем при $m \in \mathbb{N}$ часто будут использоваться перестановки $\overline{1,m}$, называемые маршрутами. Кроме того, будут использоваться частичные маршруты, в качестве таковых рассматриваются элементы $(\mathrm{bi})[K]$, где $K \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ является п/м «промежутка» $\overline{1,m}$ при некотором фиксированном $m \in \mathbb{N}$.

3. Специальные обозначения и понятия; постановка задачи.

В дальнейшем рассматривается (не в самом общем виде) задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования. Предполагается, что с каждым из мегаполисов связано выполнение (исполнителем) некоторых работ. Одной из содержательных задач, приводящих к рассматриваемой проблеме, является задача листовой резки деталей на станках с числовым программным управлением (ЧПУ) [19]; в этом смысле настоящая работа продолжает [20]. Другие прикладные задачи, имеющие отношение к рассматриваемой ниже проблеме, могут быть связаны с моделями популяций в биологии.

В конструкции, рассматриваемой далее, существенно используется модель с мегаполисами (непустыми конечными множествами), что, с одной стороны, согласуется с потребностями практики (см., например, [19, 20] в связи с задачей о листовой резке), а, с другой, доставляет некоторые удобства математического характера.

Условимся о некоторых обозначениях, имея в виду как возможность непосредственного использования схемы на основе (нестандартной версии) ДП для решения исходной маршрутной задачи (в случае "умеренной" её размерности), так и возможность применения беллмановской вставки в решение (маршрут-трасса), полученное тем или иным эвристическим методом. В последнем случае определяемые ниже объекты будут играть роль параметров, которые следует затем "привязать" к схеме решения "большой" задачи; последнее по причине затруднений с вычислительной реализацией не может быть построено оптимальным за приемлемый промежуток времени. Фиксируем произвольное непустое множество X, точку $x^0 \in X$, именуемую базой, число $N \in \mathbb{N}, 2 \leqslant N$, а также множества $M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_N \in \mathrm{Fin}(X)$, называемые мегаполисами; последние образуют кортеж $(M_i)_{i \in \overline{1,N}} : \overline{1,N} \to \mathrm{Fin}(X)$. Полагаем, что

$$(x^0 \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1,N}) \,\&\, (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1,N} \quad \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{3.1}$$

Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок $\overline{1,N}$, т.е. множество всех (полных) маршрутов. Выбор $\alpha \in \mathbb{P}$ позволяет рассматривать кортеж занумерованных мегаполисов $(M_{\alpha(t)})_{t \in \overline{1,N}}$; индексу t можно при желании придавать смысл дискретного времени. Далее на выбор $\alpha \in \mathbb{P}$ накладываются ограничения; сейчас отметим, что для каждого такого выбора можно рассматривать трассу или траекторию

$$x^0 \to (x_{1,1} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in M_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (x_{N,1} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in M_{\alpha(N)}), \tag{3.2}$$

где прямые стрелки соответствуют внешним в смысле (3.1) перемещениям, а волнистые — внутренним работам.

Условия предшествования. В дальнейшем $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$; разумеется, $\mathbb{P}$ есть множество (а, на самом деле, группа) всех перестановок индексного множества $\overline{1,N}$; элементы $\mathbb{P}$ называем (полными) маршрутами. Напомним, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ определена перестановка $\alpha^{-1} \in \in \mathbb{P}$, обратная к α, которая, следовательно, также является маршрутом. Среди маршрутов из $\mathbb{P}$ выделяем допустимые по предшествованию.

Фиксируем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$; итак, $\mathbf{K}$ — множество, для которого $\mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \times \overline{1,N}$ (случай $\mathbf{K} = \emptyset$ не исключается и соответствует отсутствию условий предшествования). Элементы $\mathbf{K}$ называем адресными парами; итак, $z \in \mathbf{K}$ есть УП, для которой $\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1,N}$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1,N}$; называем индекс $\mathrm{pr}_1(z)$ (индекс $\mathrm{pr}_2(z)$) отправителем (получателем) адресной пары z. Условия предшествования определяем в виде требования: для каждой адресной пары посещение отправителя должно предшествовать посещению получателя. Тогда [10, часть 2]

$$\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \quad \forall z \in \mathbf{K}\} \tag{3.3}$$

есть множество всех маршрутов, допустимых в вышеупомянутом смысле. Полагаем в дальнейшем, что

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \;\; \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \; \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \;\; \forall z \in \mathbf{K}_0. \tag{3.4}$$

Тогда [10, (2.2.53)] $\mathbf{A} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P})$, и, в частности, $\mathbf{A}$ есть непустое конечное множество. Кроме того, из (3.4) следует, что (в рассматриваемом далее случае) $\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z) \;\; \forall z \in \mathbf{K}$; итак, в нашем случае имеет место невырожденность каждой из адресных пар. Подчеркнём, что $x^0, N, M_1, \ldots, M_N, \mathbf{K}$ играют роль параметров, относительно которых постулируются только условия (3.1), (3.4).

Трассы, согласованные с маршрутом. Пусть (здесь и ниже)

$$\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big); \tag{3.5}$$

ясно, что $\mathbf{X} \in \mathrm{Fin}(X)$. Заметим, что, согласно (3.2), мы анализируем далее перемещения в $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$; с этой точки зрения логично и x^0 «заменить» на $\mathbf{z}^{(0)} \stackrel{\triangle}{=} (x^0, x^0) \in \mathbf{X}$. Обозначаем через $\widetilde{\mathbb{Z}}$ множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}$; тогда (3.2) характеризует фактически некоторый кортеж из $\widetilde{\mathbb{Z}} : z_0 = \mathbf{z}^{(0)}, z_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}), \ldots, z_N = (x_{N,1}, x_{N,2})$. Уместно ввести совокупность всех таких (соответствующих (3.2)) кортежей. Итак,

$$\mathcal{Z}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \big\{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \widetilde{\mathbb{Z}} \mid (z_0 = \mathbf{z}^{(0)}) \,\&\, (z_t \in M_{\alpha(t)} \times M_{\alpha(t)} \;\; \forall t \in \overline{1,N})\big\} \in \mathrm{Fin}(\widetilde{\mathbb{Z}}) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3.6}$$

Множества (3.6) можно рассматривать как пучки трасс или траекторий, согласованных в смысле (3.2) с наперёд выбранным маршрутом. Если $\alpha \in \mathbf{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$, то УП $\big(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0,N}}\big)$ называем допустимым решением (ДР). Разумеется, ДР составляют непустое (конечное) п/м $\mathbb{P} \times \widetilde{\mathbb{Z}}$.

Функции стоимости. Мы фиксируем в дальнейшем

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X}], (c_i)_{i \in \overline{1,N}} : \overline{1,N} \to \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X}], f \in \mathcal{R}_+[X] \tag{3.7}$$

в качестве способов оценивания внешних перемещений, внутренних работ (связанных с мегаполисами) и терминального состояния. По соображениям методического характера полагаем функции (3.7) максимально продолженными.

Замечание 3.1. Значения $\mathbf{c}(x, y)$ функции $\mathbf{c}$ существенны лишь в следующих двух ситуациях: 1) $x = x^0$ и $y \in M_j$, где $j \in \overline{1,N}$; 2) $x \in M_i, y \in M_j$, где $i \in \overline{1,N}, j \in \overline{1,N}, i \neq j$. При

$s\in\overline{1,N}$ значения $c_s(x,y)$ функции c_s существенны при $x\in M_s$ и $y\in M_s$. Наконец, значения $f(x)$ (терминальной) функции f существенны при $x\in M_l$, где $l\in\overline{1,N}$. Продолжение данных (существенных) фрагментов функций стоимости до $\mathbf{c}, c_1, \ldots, c_N, f$ (3.7) может быть любым (в частности, всегда возможно доопределение нулём). □

Отметим, что $\mathbf{c}, c_1, \ldots, c_N, f$ также можно рассматривать в качестве параметров, дополняя таким образом систему $(x^0, N, M_1, \ldots, M_N, \mathbf{K})$. В терминах данного (расширенного) набора параметров вводим аддитивный критерий, полагая сначала

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \triangleq \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1})\big)+\sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}(z_t) + f\big(\mathrm{pr}_2(z_N)\big) \quad \forall \alpha\in\mathbb{P} \ \ \forall (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\widetilde{\mathbb{Z}}. \tag{3.8}$$

Однако использовать величины $\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}]$ (3.8) будем только в случаях $\alpha\in\mathbf{A}$, $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha$; тогда, согласно (3.6),

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] = \mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(z_1)\big) + \sum_{t=1}^{N-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}(z_t) + f\big(\mathrm{pr}_2(z_N)\big). \tag{3.9}$$

Посредством (3.8), (3.9) можно оценивать каждое ДР. Рассматриваемая далее основная задача (ОЗ) имеет вид:

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \to \min, \ \ \alpha\in\mathbf{A}, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha. \tag{3.10}$$

Через V условимся обозначать её экстремум (значение), т. е. наименьшее из чисел (3.10) при переборе $\alpha\in\mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha$. Как обычно, ДР $\big(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\big)$, где $\alpha^0\in\mathbf{A}$ и $(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha$ называем оптимальным, если $\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}]=V$. Наша цель состоит в определении V и какого-либо оптимального ДР. Для достижения данной цели используем аппарат ДП, следуя [10, ч. 3], [11], [21].

4. Динамическое программирование, 1.

Напомним сначала схему расширения ОЗ, следуя [10, ч. 2]. Пусть $\mathfrak{N}\triangleq\mathcal{P}'(\overline{1,N})$, множества — элементы $\mathfrak{N}$ — называем списками (заданий); через $\mathbf{I}$ обозначаем оператор [10, ч. 2], действующий в $\mathfrak{N}$ по правилу: при $K\in\mathfrak{N}$

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) : z\in\Xi[K]\}, \tag{4.1}$$

где $\Xi[K] \triangleq \{z\in\mathbf{K}|\ \big(\mathrm{pr}_1(z)\in K\big)\big(\mathrm{pr}_2(z)\in K\big)\}$. Из (4.1) легко следует, что $\mathbf{I}(\{t\}) = \{t\}$ $\forall t\in\overline{1,N}$. В соответствии с [10, (2.2.54)] имеем, что

$$\begin{gathered}(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K] \triangleq \{\alpha\in(\mathrm{bi})[K]|\ \alpha(m)\in\mathbf{I}\big(\{\alpha(i): i\in\overline{m,|K|}\}\big) \ \ \forall m\in\overline{1,|K|}\} = \\ = \{\alpha\in(\mathrm{bi})[K]|\alpha(m)\in\mathbf{I}\big(K\setminus\{\alpha(i): i\in\overline{1,m-1}\}\big) \ \ \forall m\in\overline{1,|K|}\}\in \\ \in\mathcal{P}'\big((\mathrm{bi})[K]\big) \ \ \forall K\in\mathfrak{N}\end{gathered} \tag{4.2}$$

(напомним, что $\overline{1,0} = \emptyset$, а потому при $H\in\mathfrak{N}$ и $\alpha\in(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[H]$ $\alpha(1)\in\mathbf{I}(H)$). При этом [10, (2.2.32), теорема 2.2.1]

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[\overline{1,N}] = \big\{\alpha\in\mathbb{P}|\alpha(m)\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\alpha(i): i\in\overline{1,m-1}\}\big) \ \ \forall m\in\overline{1,N}\big\}. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует простое правило пошагового построения маршрутов, допустимых по предшествованию: в момент $t = 1$ выбираем $j_1\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$; если $t\in\overline{1,N-1}$ и индексы $j_1\in\overline{1,N}, \ldots$ $\ldots, j_t\in\overline{1,N}$ уже найдены, то выбираем $j_{t+1}\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{j_s : s\in\overline{1,t}\})$. Разумеется, упомянутые процедуры выбора $j_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}), j_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{j_1\}), \ldots, j_N \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{j_s : s \in \overline{1,N-1}\})$ (имеется в виду случай $N \geq 3$) можно подчинить тем или иным дополнительным условиям.

Частичные трассы. Если $K \in \mathfrak{N}$, то $|K| \in \overline{1,N}$ и через $\mathbb{Z}_K$ обозначаем множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \to \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. При этом $\tilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\overline{1,N}}$. По аналогии с (3.2) полагаем при $x \in \mathbf{X}, K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, что

$$\mathcal{Z}(x,K,\alpha) \triangleq \{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K \,|\, (z_0 = (x,x)) \,\&\, (z_t \in M_{\alpha(t)} \times M_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,|K|})\}, \tag{4.4}$$

получая всякий раз непустое конечное множество (в (4.4) важен случай $\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$). По аналогии с (3.8) полагаем, что

$$\begin{gathered}\tilde{\mathfrak{C}}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}|K] \triangleq \sum_{t=0}^{|K|-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{|K|} c_{\alpha(t)}(z_t) + f\big(\mathrm{pr}_2(z_{|K|})\big) \\ \forall K \in \mathfrak{N} \ \ \forall \alpha \in (\mathrm{bi})[K] \ \ \forall (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Разумеется, посредством (4.5) можно, при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, оценивать качество УП $\big(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\big)$, для которых $\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}$ — элемент множества (4.4). Это позволяет определить при $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ частичную задачу (ЧЗ)

$$\tilde{\mathfrak{C}}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} |\, K] \to \min, \ \ \alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K], (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x,K,\alpha); \tag{4.6}$$

задаче (4.6) сопоставляется значение (экстремум) $v(x,K) \in [0,\infty[$ в виде наименьшего из чисел $\tilde{\mathfrak{C}}_\alpha[\mathbf{z}|\,K], \alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K], \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x,K,\alpha)$. Учитывая (4.3) и то, что $\mathcal{Z}_\alpha = \mathcal{Z}(x^0, \overline{1,N}, \alpha)$ при $\alpha \in \mathbf{A}$, получаем равенство

$$V = v(x^0, \overline{1,N}). \tag{4.7}$$

В силу (4.7) систему ЧЗ (4.6) рассматриваем в качестве расширения ОЗ. Полагаем также, что $v(x,\emptyset) \triangleq f(x) \ \ \forall x \in \mathbf{X}$. Тем самым завершается определение зависимости $v \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N})]$, имеющей смысл функции Беллмана. При этом (см. [11,21,22])

$$v(x,K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in M_j\times M_j} \big[\mathbf{c}\big(x, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big)\big] \ \ \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N}; \tag{4.8}$$

в (4.9) имеем уравнение Беллмана, соответствующее расширению на основе (4.6). Из (4.7), (4.9) имеем, в частности, что

$$V = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z\in M_j\times M_j} \big[\mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\}\big)\big]. \tag{4.9}$$

5. Динамическое программирование, 2.

Напомним экономичную версию ДП, предложенную в [10, §4.9]. Для этого, прежде всего, введём существенные (по предшествованию) списки: список $K \in \mathfrak{N}$ называем существенным, если $\forall z \in \mathbf{K}$ $\big(\mathrm{pr}_1(z) \in K\big) \Rightarrow \big(\mathrm{pr}_2(z) \in K\big)$. Все прочие списки из $\mathfrak{N}$ далее не рассматриваем. Итак,

$$\mathcal{G} \triangleq \big\{K \in \mathfrak{N} | \forall z \in \mathbf{K} \ \ \big(\mathrm{pr}_1(z) \in K\big) \Rightarrow \big(\mathrm{pr}_2(z) \in K\big)\big\} \tag{5.1}$$

есть множество всех существенных списков. Если $s \in \overline{1,N}$, то $\mathcal{G}_s \triangleq \{K \in \mathcal{G} | s = |K|\}$ есть множество всех s-элементных существенных списков. Ясно, что семейство $\{\mathcal{G}_i : i \in \overline{1,N}\}$ образует разбиение $\mathcal{G}$ (5.1). Разумеется, $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ и при $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$ ($\mathbf{K}_1$ — множество всех отправителей) справедливо равенство $\mathcal{G}_1 = \big\{\{t\} : t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\big\}$. Кроме того, [21, с. 60]

$$\mathcal{G}_{s-1} = \big\{K \setminus \{t\} : K \in \mathcal{G}_s, t \in \mathbf{I}(K)\big\} \ \ \forall s \in \overline{2,N}. \tag{5.2}$$

Итак, имеем рекуррентную процедуру на основе (5.2): $\mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_{N-1} \to \ldots \to \mathcal{G}_1$. Из [10, предложение 4.9.2] следует, что $\mathcal{G}_k \neq \emptyset \;\; \forall k \in \overline{1,N}$.

Для последующих построений понадобится обратная в некотором смысле процедура: если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то полагаем, что

$$\mathcal{J}_s(K) \overset{\triangle}{=} \big\{ j \in \overline{1,N} \setminus K \,|\, \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1} \big\}. \tag{5.3}$$

В связи с (5.3) напомним [21, предложение 4]:

$$n \in \mathbf{I}(\{n\} \cup K) \;\; \forall s \in \overline{1, N-1} \;\; \forall K \in \mathcal{G}_s \;\; \forall n \in \mathcal{J}_s(K). \tag{5.4}$$

Наконец, из [21, (36)] имеем, что

$$\mathcal{J}_s(K) \neq \emptyset \;\; \forall s \in \overline{1, N-1} \;\; \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{5.5}$$

Предложение 5.1. Если $s \in \overline{1, N-1}$, то справедливо равенство

$$\mathcal{G}_{s+1} = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \big\{ \{j\} \cup K : j \in \mathcal{J}_s(K) \big\}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Обозначим через Ω множество в правой части (5.6). Тогда в силу (5.3) получаем, что

$$\Omega \subset \mathcal{G}_{s+1}. \tag{5.7}$$

Пусть $H \in \mathcal{G}_{s+1}$. Тогда, согласно (5.2),

$$H \setminus \{t\} \in \mathcal{G}_s \;\; \forall t \in \mathbf{I}(H); \tag{5.8}$$

здесь мы учли, что $s+1 \in \overline{2,N}$. Напомним, что, поскольку $H \in \mathfrak{N}$ (см. (5.1)), непременно $\mathbf{I}(H) \in \mathfrak{N}$ и, в частности, $\mathbf{I}(H) \neq \emptyset$. Выберем $n \in \mathbf{I}(H)$. Тогда, в частности, $n \in H$ (см. (4.1)). Из (5.8) получаем, что

$$\widetilde{H} \overset{\triangle}{=} H \setminus \{n\} \in \mathcal{G}_s, \tag{5.9}$$

причём $\{n\} \cup \widetilde{H} = H$. Заметим, что, согласно (5.3), (5.9),

$$\mathcal{J}_s(\widetilde{H}) = \big\{ j \in \overline{1,N} \setminus \widetilde{H} \,|\, \{j\} \cup \widetilde{H} \in \mathcal{G}_{s+1} \big\}. \tag{5.10}$$

При этом $n \in \overline{1,N}$ и, согласно (5.9), $n \notin \widetilde{H}$; в итоге $n \in \overline{1,N} \setminus \widetilde{H}$, причём $\{n\} \cup \widetilde{H} = H \in \mathcal{G}_{s+1}$ по выбору H. Следовательно (см. (5.10)), $n \in \mathcal{J}_s(\widetilde{H})$, а тогда по определению Ω и с учётом (5.9) получаем, что $H = \{n\} \cup \widetilde{H} \in \Omega$, чем и завершается проверка вложения $\mathcal{G}_{s+1} \subset \Omega$. С учётом (5.7) имеем требуемое равенство $\mathcal{G}_{s+1} = \Omega$. □

Предложение 5.1 характеризует свойство определённой полноты процедуры пошагового наращивания существенных списков, указанной в (5.3). Напомним, что семейство $\mathcal{G}_1$ определяется (по $\mathbf{K}$) явным образом.

Слои пространства позиций. Следуя [21, 22], введём непустые п/м $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N})$, обозначаемые далее через $D_0, D_1, \ldots, D_N$. В терминах

$$\mathbf{M} \overset{\triangle}{=} \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} M_i \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$$

определяем $D_0 : D_0 \overset{\triangle}{=} \{(x, \emptyset) : x \in \mathbf{M}\} = \mathbf{M} \times \{\emptyset\}$; кроме того, $D_N \overset{\triangle}{=} \{(x^0, \overline{1,N})\}$ (синглетон). Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то в терминах

$$\mathcal{M}_s[K] \overset{\triangle}{=} \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} M_j \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$$

(см. (5.5)) определяем клетку $\mathbb{D}_s[K] \overset{\triangle}{=} \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}$. С помощью упомянутых клеток конструируем множества $D_1, \ldots, D_{N-1}$:

$$D_s \overset{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s) \quad \forall s \in \overline{1, N-1}. \tag{5.11}$$

В (5.11) определены промежуточные слои в $\mathbf{X} \times \mathcal{G}$; множества $D_0, D_1, \ldots, D_N$ именуем слоями пространства позиций. Легко видеть, что $(y, K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}$ $\forall s \in \overline{1, N}$ $\forall K \in \mathcal{G}_s$ $\forall j \in \mathbf{I}(K)$ $\forall y \in$ $\in M_j$. В частности, (см. (5.11)), имеем очевидное следствие:

$$\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big) \in D_{s-1} \quad \forall s \in \overline{1, N} \quad \forall (x, K) \in D_s \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall z \in M_j \times M_j. \tag{5.12}$$

6. Попятная процедура.

Отметим, что с учётом (5.11) корректно определяются сужения функции Беллмана: если $s \in \overline{0, N}$, то функция $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ задаётся естественным правилом

$$v_s(x, K) \overset{\triangle}{=} v(x, K) \quad \forall (x, K) \in D_s. \tag{6.1}$$

Из (6.1) следует, в частности, что $v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0]$ определяется условием

$$v_0(x, \emptyset) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{M} \tag{6.2}$$

и, таким образом, v_0 известна. Из (4.9) и (5.12) следует, в свою очередь,

Предложение 6.1. Если $s \in \overline{1, N}$, то преобразование v_{s-1} в v_s имеет вид

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \Big[\mathbf{c}\big(x, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v_{s-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big)\Big] \quad \forall (x, K) \in D_s. \tag{6.3}$$

Из (4.7) и (6.1) имеем, что $V = v_N(x^0, \overline{1, N})$, а потому, согласно (6.3),

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in M_j \times M_j} \Big[\mathbf{c}\big(x^0, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}\big)\Big]. \tag{6.4}$$

Алгоритм построения слоёв функции Беллмана на функциональном уровне. Предлагается следующая процедура, состоящая из 3 этапов.

1) Используя $\mathcal{G}_N = \{\overline{1, N}\}$ в качестве начального элемента, конструируем на основе (5.2) семейства $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$.

2) Располагая $\mathcal{G}_t, t \in \overline{1, N}$, конструируем для каждых $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ множество $\mathcal{J}_s(K)$ (5.3), с помощью которого всякий раз определяются $\mathcal{M}_s[K]$ и клетка $\mathbb{D}_s[K]$. Затем посредством (5.11) определяются слои $D_1, \ldots, D_{N-1}$; поскольку D_0 и D_N известны, мы получаем кортеж $(D_i)_{i \in \overline{0, N}}$ непустых множеств, составленных каждое из позиций.

3) С использованием предложения 6.1 находим слои функции Беллмана. В самом деле (6.2) определяет v_0. Если $m \in \overline{0, N-1}$, то v_m преобразуется в v_{m+1} по правилу, вытекающему из (6.3):

$$v_{m+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} \Big[\mathbf{c}\big(x, \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + v_m\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big)\Big] \quad \forall (x, K) \in D_{m+1}; \tag{6.5}$$

в (6.5) учитываем, что, согласно (5.12), $\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big) \in D_m$ при $(x, K) \in D_{m+1}, j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in M_j \times M_j$. После N этапов, подобных (6.5), все функции $v_0, v_1, \ldots, v_N$ будут построены и, в частности, будет определено значение V. Кортеж $(v_s)_{s \in \overline{0, N}}$ обычным для теории ДП образом используется при построении оптимального ДР.

Сейчас ограничимся совсем кратким обсуждением (напомним, что $\mathbf{z}^{(0)} = (x^0, x^0)$; см. раздел 3). Полагаем этапы 1) – 3) завершенными; с учётом (6.4) выбираем $\mathbf{j}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)} \in$ $\in M_{\mathbf{j}_1} \times M_{\mathbf{j}_1}$ так, что

$$V = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)})\big) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}) + v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\big); \tag{6.6}$$

согласно (5.12), $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\big) \in D_{N-1}$ и в силу предложения 6.1

$$\begin{aligned} v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\big) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})} \; \min_{z \in M_j \times M_j} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(z)\big) + c_j(z) + \\ + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; j\}\big)\Big]; \end{aligned} \tag{6.7}$$

в (6.7) учтено, что, согласно (5.12), $\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; j\}\big) = \big(\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}) \setminus \{j\}\big) \in D_{N-2}$ при $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})$ и $z \in M_j \times M_j$. Выбираем с учётом (6.7) $\mathbf{j}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)} \in M_{\mathbf{j}_2} \times$ $\times M_{\mathbf{j}_2}$ так, что при этом

$$v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1\}\big) = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)})\big) + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}) + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}\big), \tag{6.8}$$

где (см. (5.12)) $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}\big) \in D_{N-2}$. Из (6.6), (6.8) следует, в частности, что

$$\begin{aligned} V = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(0)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)})\big) + \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)})\big) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)}) + c_{\mathbf{j}_2}(\mathbf{z}^{(2)}) + \\ + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{j}_1; \mathbf{j}_2\}\big). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Если $N = 2$, то, как легко видеть (см. (6.2), (6.9)), построение оптимального ДР завершено. Если же $N > 2$, то процедуру последовательного выбора экстремальных элементов (см. (6.7), (6.8)) следует продолжить вплоть до исчерпывания списка заданий.

7. Локальное улучшение маршрутов и трасс.

Рассмотрим один из вариантов применения вышеизложенной конструкции на основе ДП для локального улучшения ДР, построенного на основе эвристических алгоритмов.

Итак, пусть $\mathbf{x}_0 \in X$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $4 \leqslant \mathbf{n}$, $L_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, L_{\mathbf{n}} \in \mathrm{Fin}(x)$. Полагаем выполненными условия, подобные (3.1):

$$(\mathbf{x}_0 \notin L_j \quad \forall j \in \overline{1,\mathbf{n}}) \;\&\; (L_p \cap L_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1,\mathbf{n}} \quad \forall q \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \{p\}). \tag{7.1}$$

В дальнейшем подразумевается, что $(L_1, \ldots, L_{\mathbf{n}})$ — «большой», кортеж мегаполисов; точнее, $2 \leqslant N < \mathbf{n}$, а целевой кортеж раздела 3 является его «частью». Через $\mathbf{P}$ обозначаем множество всех перестановок $\overline{1,\mathbf{n}} : \mathbf{P} \triangleq (\mathrm{bi})[\overline{1,\mathbf{n}}]$; выбор перестановки, т. е. маршрута, из $\mathbf{P}$ должен, вообще говоря, осуществляться при соблюдении условий предшествования. С целью введения последних фиксируем $\mathfrak{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}})$; УП из $\mathfrak{K}$ также называем адресными. Подобно $\mathbf{A}$ раздела 3, мы в виде

$$\mathcal{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbf{P} \,|\, \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \quad \forall z \in \mathfrak{K}\} \tag{7.2}$$

имеем множество всех $\mathfrak{K}$-допустимых (по предшествованию) маршрутов; содержательный смысл условий предшествования и $\mathfrak{K}$-допустимости аналогичен разделу 3. Постулируем, что

$$\forall \mathfrak{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathfrak{K}) \quad \exists z_0 \in \mathfrak{K}_0 : \; \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathfrak{K}_0. \tag{7.3}$$

Из (7.2), (7.3) следует (см. [10, (2.2.53)]), что $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P})$ и, в частности, $\mathcal{A} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{P})$.

Подобно разделу 3, определяем трассы, согласованные с маршрутом, полагая для удобства обозначений

$$\mathfrak{X} \triangleq \{\mathbf{x}_0\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} L_i\Big). \tag{7.4}$$

Тогда через $\tilde{\mathfrak{Z}}$ обозначим множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}: \overline{0,\mathbf{n}} \to \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$. Полагаем далее, что трассы определяются подобно (3.6): если $\beta\in\mathbf{P}$, то

$$\mathfrak{Z}_\beta \triangleq \big\{(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \tilde{\mathfrak{Z}} \,|\, \big((z_0 = (\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0)\big) \,\&\, (z_t \in L_{\beta(t)}\times L_{\beta(t)}\ \ \forall t\in\overline{1,\mathbf{n}})\big\} \in \mathrm{Fin}(\tilde{\mathfrak{Z}}). \tag{7.5}$$

Как и в разделе 3, УП $\big(\beta,(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$, где $\beta\in\mathcal{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\in\mathfrak{Z}_\beta$, рассматриваем как ДР «большой», задачи. Ясно, что так определённые ДР составляют непустое конечное п/м $\mathbf{P}\times\tilde{\mathfrak{Z}}$. По аналогии с (3.7) определяем функции стоимости в «большой», задаче:

$$\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}], c_1^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}], \ldots, c_{\mathbf{n}}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}], f^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}]. \tag{7.6}$$

Разумеется, определение (7.6) избыточно, но при таком способе построение основных элементов «большой», задачи значительно упрощается (см. содержательное обсуждение существенных фрагментов функций (3.7) в разделе 3). Если $\beta\in\mathbf{P}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\in\tilde{\mathfrak{Z}}$, то полагаем, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{C}_\beta^\natural[(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \sum_{t=0}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_t),\mathrm{pr}_1(z_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} c^\natural_{\beta(t)}(z_t) + f^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})\big) = \\ = \sum_{t=0}^{\mathbf{n}-1}\big[\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_t),\mathrm{pr}_1(z_{t+1})\big) + c^\natural_{\beta(t+1)}(z_{t+1})\big] + f^\natural\big(\mathrm{pr}_2(z_{\mathbf{n}})\big).\end{gathered} \tag{7.7}$$

Рассматриваемая ниже «большая», задача имеет вид:

$$\mathfrak{C}_\beta^\natural[(z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] \to \min, \beta\in\mathcal{A}, (z_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta. \tag{7.8}$$

Итак, в (7.7), (7.8) определена задача, подобная ОЗ (3.10). Мы полагаем, однако, что размерность задачи (7.8) является достаточно большой ($N < \mathbf{n}$), чем затрудняется построение точного её решения (данная задача, как и (3.10), является труднорешаемой в традиционном понимании); в этой связи предполагается, что в задаче (7.8) используется тот или иной эвристический алгоритм (см., например, жадный алгоритм работы [23]).

Сейчас мы полагаем, что найдено какое-то ДР $\big(\lambda,(\mathbf{h})_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ задачи (7.8): $\lambda\in\mathcal{A}, (\mathbf{h})_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\lambda$. Мы ставим своей целью улучшить значение $\mathfrak{C}_\lambda^\natural[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}]$, привлекая ОЗ (3.10). В этой связи напомним, что $\lambda\in\mathbf{P}$ и при этом

$$\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\ \ \forall z\in\mathfrak{K}. \tag{7.9}$$

Кроме того, $(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}: \overline{0,\mathbf{n}} \to \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$; $\mathbf{h}_0 = (\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_0)$ и

$$\mathbf{h}_t \in L_{\lambda(t)}\times L_{\lambda(t)}\ \ \forall t\in\overline{1,\mathbf{n}}. \tag{7.10}$$

Условимся о следующих правилах действий. Фиксируем число $\nu\in\overline{1,\mathbf{n}}$, для которого $\nu + N + 1 < \mathbf{n}$ (здесь $N\in\mathbb{N}$ соответствует предположениям раздела 3; на неформальном уровне полагаем, что N выбрано, исходя из возможностей вычислительной реализации схемы ДП; в настоящее время алгоритм, реализованный на ПЭВМ, позволяет полагать $N = 31$). Конкретный выбор ν может осуществляться на основе анализа ДР $\big(\lambda,(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$. Тогда $\nu + s \in \overline{1,\mathbf{n}-1}$ $\forall s\in\overline{1,N}$. Поэтому определены индексы $\lambda(\nu+1)\in\overline{1,\mathbf{n}},\ldots,\lambda(\nu+N)\in\overline{1,\mathbf{n}}$. С учётом этого принимаем следующее соглашение:

$$M_s \triangleq L_{\lambda(\nu+s)}\ \ \forall s\in\overline{1,N}. \tag{7.11}$$

Пусть $\Gamma \stackrel{\triangle}{=} \{\lambda(\nu \mid s) : s \in \overline{1,N}\}$, а $\Lambda : \overline{1,N} \to \Gamma$ определяется правилом

$$\Lambda \stackrel{\triangle}{\;} \big(\lambda(\nu \mid s)\big)_{s \in \overline{1,N}};\tag{7.12}$$

Λ есть биекция $\overline{1,N}$ на $\Gamma : |\Gamma| \; N$ и $\Lambda \in (\mathrm{bi})[\Gamma]$. Тогда, согласно (7.11), имеем при $j \in \overline{1,N}$ равенство $M_j \; L_{\Lambda(j)}$, где $\Lambda(j) \; \lambda(\nu \mid j)$. Введём в рассмотрение следующее множество

$$Q \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathfrak{K} | (\mathrm{pr}_1(z) \in \Gamma) \& (\mathrm{pr}_2(z) \in \Gamma)\} \in \mathcal{P}(\mathfrak{K}).\tag{7.13}$$

Тогда Q есть п/м $\overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}}$. Соответственно, полагаем

$$\mathbf{K} \stackrel{\triangle}{\;} \Big\{\Big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big), \Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big) : \; z \in Q\Big\},\tag{7.14}$$

получая, конечно, вложение $\mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$. Для $\mathbf{K}$ (7.14) используем множество $\mathbf{A}$ раздела 3. Итак, мы конкретизируем $\mathbf{K}$ раздела 3 посредством (7.14), после чего «включаем» (3.3). Ясно, что $\forall \alpha \in \mathbf{A}$, $\forall z \in Q$

$$\alpha^{-1}\Big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big)\Big) < \alpha^{-1}\Big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big).\tag{7.15}$$

При этом в случае $\alpha \in \mathbb{P}$ композиция $\Lambda \circ \alpha$ отображений α и Λ есть отображение $\overline{1,N}$ на Γ и, более того, биекция $\overline{1,N}$ на Γ. При этом, согласно (7.15), имеем, что

$$(\Lambda \circ \alpha)^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < (\Lambda \circ \alpha)^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \;\; \forall \alpha \in \mathbf{A} \;\; \forall z \in Q.\tag{7.16}$$

Предложение 7.1. Множество $\mathbf{K}$ (7.14) обладает свойством (3.4).

Доказательство. Пусть $\mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})$, т. е. $\mathbf{K}_0$ непустое п/м $\mathbf{K}$. Тогда $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}$ и

$$\forall h \in \mathbf{K}_0 \;\; \exists z \in Q : \; h = \Big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big), \Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\Big).\tag{7.17}$$

Из (7.17) вытекает с очевидностью, что

$$\forall h \in \mathbf{K}_0 \;\; \exists z \in Q : \; \Big(\Lambda\big(\mathrm{pr}_1(h)\big), \Lambda\big(\mathrm{pr}_2(h)\big)\Big) \;\; z.\tag{7.18}$$

Из (7.13), (7.18) получаем также очевидное свойство

$$\Big(\Lambda\big(\mathrm{pr}_1(h)\big), \Lambda\big(\mathrm{pr}_2(h)\big)\Big) \in Q \;\; \forall h \in \mathbf{K}_0\tag{7.19}$$

и, как следствие, (см. (7.13)), $H \stackrel{\triangle}{\;} \Big\{\Big(\Lambda\big(\mathrm{pr}_1(h)\big), \Lambda\big(\mathrm{pr}_2(h)\big)\Big) : h \in \mathbf{K}_0\Big\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{K})$. С учётом (7.3) подберём $z_* \in H$ так, что при этом

$$\mathrm{pr}_1(z_*) \; / \; \mathrm{pr}_2(z) \;\; \forall z \in H.\tag{7.20}$$

Теперь, используя (7.19) и определение H, подберём $h_* \in \mathbf{K}_0$ так, что при этом

$$z_* = \Big(\Lambda\big(\mathrm{pr}_1(h_*)\big), \Lambda\big(\mathrm{pr}_2(h_*)\big)\Big).\tag{7.21}$$

Из (7.20), (7.21) следует теперь, что

$$\Lambda\big(\mathrm{pr}_1(h_*)\big) / \; \mathrm{pr}_2(z) \;\; \forall z \in H.\tag{7.22}$$

В этом случае из определения H и (7.22) вытекает, что

$$\Lambda\big(\mathrm{pr}_1(h_*)\big) / \Lambda\big(\mathrm{pr}_2(h)\big) \quad \forall h \in \mathbf{K}_0. \tag{7.23}$$

Как следствие, из (7.23) следует свойство

$$\mathrm{pr}_1(h_*) \; / \; \mathrm{pr}_2(h) \quad \forall h \in \mathbf{K}_0. \tag{7.24}$$

По выбору h_* получаем из (7.24), что $\exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \mathrm{pr}_1(z_0) / \mathrm{pr}_2(z) \;\; \forall z \in \mathbf{K}_0$. Поскольку множество $\mathbf{K}_0$ выбиралось произвольно, предложение доказано ($\mathbf{K}$ (7.14) удовлетворяет (3.4)). □

Напомним, что (см. предложение 7.1, определения раздела 3) $\mathbf{A}$ есть непустое п/м $\mathbb{P}$. Возвращаясь к $(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}$, отметим, что $\mathbf{h}_\nu \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$, а потому $\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu)\in\mathfrak{X}$. Мы полагаем далее, что в построениях раздела 3

$$x^0 = \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu). \tag{7.25}$$

Следуем теперь соглашениям раздела 3 в конкретизации, определённой в настоящем разделе. В данной локальной задаче с базой (7.25) используем ДР раздела 3.

Рассмотрим нужную в дальнейшем конкретизацию функций стоимости (3.7). Здесь, конечно, следует учесть, что, согласно (3.5), (7.4) и (7.11), $\mathbf{X}\subset\mathfrak{X}$. Поэтому $\mathbf{c}$ в (3.7) можно определить посредством сужения $\mathbf{c}^\natural$:

$$\mathbf{c}(z) \triangleq \mathbf{c}^\natural(z) \quad \forall z \in \mathbf{X}\times\mathbf{X}. \tag{7.26}$$

Кроме того, заметим, что, согласно (7.6),

$$c^\daleth_{\Lambda(1)} \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}], \ldots, c^\daleth_{\Lambda(N)} \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}]. \tag{7.27}$$

С учётом этого определяем функции $c_1,\ldots,c_N$ следующим образом: если $j\in\overline{1,N}$, то $c_j\in \in\mathcal{R}_+[\mathbf{X}\times\mathbf{X}]$ имеет вид

$$c_j(z) \triangleq c^\natural_{\Lambda(j)}(z) \quad \forall z \in \mathbf{X}\times\mathbf{X}. \tag{7.28}$$

Иными словами, при $j\in\overline{1,N}$ функция c_j определяется в виде сужения $c^\natural_{\Lambda(j)}$ на $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$. Заметим, что

$$c_{\alpha(j)}(z) = c^\natural_{(\Lambda\circ\alpha)(j)}(z) \quad \forall \alpha\in\mathbf{A} \;\; \forall z \in \mathbf{X}\times\mathbf{X}. \tag{7.29}$$

Наконец, $f\in\mathcal{R}_+[\mathbf{X}]$ определяем условием

$$f(x) \triangleq \mathbf{c}^\daleth\big(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{\nu+N+1})\big) + c_{\lambda(\nu+N+1)}(\mathbf{h}_{\nu+N+1}) \quad \forall x \in \mathbf{X}. \tag{7.30}$$

В терминах (7.26), (7.28), (7.30) определяется аддитивный критерий раздела 3: каждой УП $\big(\alpha, (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\big)$, $\alpha\in\mathbf{A}$, $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha$, сопоставляем число $\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}]$ (3.9). В результате получаем вариант задачи (3.10).

Пусть $\big(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\big)$ есть оптимальное ДР задачи (3.10) в упомянутой её конкретизации: $\alpha^0\in\mathbf{A}, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_{\alpha^0}$ и при этом

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}] \leqslant \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \quad \forall\alpha\in\mathbf{A} \;\; \forall (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha. \tag{7.31}$$

Обсудим естественный вариант «встраивания» $\big(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\big)$ в решение $\big(\lambda, (\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ «большой» задачи. Начнём с рассмотрения процедуры «встраивания» α^0 в маршрут λ. Для этого заметим, прежде всего, что при $t\in\overline{\nu+1,\nu+N}$ определены индексы $t-\nu\in\overline{1,N}, \alpha^0(t-\nu)\in\overline{1,N}$ и, как следствие,

$$(\Lambda\circ\alpha^0)(t-\nu) = \Lambda\big(\alpha^0(t-\nu)\big) = \lambda\big(\nu+\alpha^0(t-\nu)\big)\in\Gamma. \tag{7.32}$$

При этом множества $\overline{1,\nu}, \overline{\nu+1,\nu+N}, \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}$ образуют разбиение $\overline{1,\mathbf{n}}$. С учётом этого введём отображение η, действующее в $\overline{1,\mathbf{n}}$, посредством следующего правила, учитывающего (7.32):

$$\big(\eta(j) \triangleq \lambda(j) \quad \forall j \in \overline{1,\nu}\big) \;\&\; \big(\eta(j) \triangleq (\Lambda\circ\alpha^0)(j-\nu) \quad \forall j \in \overline{\nu+1,\nu+N}\big) \;\& \\ \&\; \big(\eta(j) \triangleq \lambda(j) \quad \forall j \in \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}\big). \tag{7.33}$$

Предложение 7.2. Отображение η есть допустимый маршрут в «большой», задаче: $\eta \in \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Свойство $\eta \in \mathbf{P}$ легко следует из биективности λ, α^0 и Λ. Ограничимся сейчас проверкой допустимости η по предшествованию, фиксируя произвольную адресную пару $\theta \in \mathfrak{K}$ «большой» задачи. Тогда $\theta \in \overline{1,\mathbf{n}} \times \overline{1,\mathbf{n}}, \mathrm{pr}_1(\theta) \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \overline{1,\mathbf{n}}$. По выбору λ имеем неравенство

$$\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big). \tag{7.34}$$

Возможен (см. (7.13)) один из следующих двух случаев

$$(\theta \in Q) \vee (\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q). \tag{7.35}$$

Упомянутые в (7.35) случаи рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала $\theta \in Q$. Имеем свойства $\mathrm{pr}_1(\theta) \in \Gamma$ и $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma$; как следствие,

$$\Big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big), \Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big) \in \mathbf{K}, \tag{7.36}$$

согласно (7.14). С учётом (7.36), $\mathbf{K}$-допустимости α^0 и простейших свойств композиции α^0 и Λ получаем, что

$$(\Lambda\circ\alpha^0)^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < (\Lambda\circ\alpha^0)^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big), \tag{7.37}$$

откуда с учётом (7.33) и легкопроверяемых равенств

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) = \nu + (\Lambda\circ\alpha^0)^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big),$$

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) = \nu + (\Lambda\circ\alpha^0)^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big),$$

вытекает, что $\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)$ в рассматриваемом случае 1); имеем импликацию

$$(\theta \in Q) \Rightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big). \tag{7.38}$$

2) Пусть $\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q$. Согласно (7.13), имеем, что

$$\big(\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma\big) \vee \big(\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma\big). \tag{7.39}$$

Обе возможности, отмеченные в (7.39), рассмотрим отдельно.

2.1) Пусть $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$. Легко видеть, что в этом случае

$$(\Lambda\circ\alpha^0)(s) \neq \mathrm{pr}_1(\theta) \quad \forall s \in \overline{1,N} \tag{7.40}$$

(используем биективность Λ). С учётом (7.33) и (7.40) получаем, что

$$\eta(j) \neq \mathrm{pr}_1(\theta) \quad \forall j \in \overline{\nu+1,\nu+N}. \tag{7.41}$$

С учётом (7.41) и биективности η имеем, что

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) \in \overline{1,\nu} \cup \overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}, \tag{7.42}$$

откуда легко следует равенство

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) = \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) \tag{7.43}$$

и, как следствие, в силу (7.9), (7.34) имеем неравенство

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big). \tag{7.44}$$

При этом $\big(\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma\big) \vee \big(\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma\big)$. Если $\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma$, то, подобно (7.43), проверяется равенство $\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) = \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)$, а тогда из (7.44) следует, что

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big). \tag{7.45}$$

Тем самым устанавливается (при условии $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$) истинность импликации

$$\big(\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma\big) \Rightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big). \tag{7.46}$$

Пусть теперь (при условии $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$) справедливо включение $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma$. Тогда

$$s_\theta \overset{\triangle}{=} \Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) \in \overline{1, N} \tag{7.47}$$

и, как следствие, (см. (7.12)) $\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) = \nu + s_\theta$. Учитывая (7.44), получаем цепочку неравенств

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \nu + s_\theta \leqslant \nu + N, \tag{7.48}$$

означающую (см. (7.42)) непременно, что

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) \in \overline{1, \nu}. \tag{7.49}$$

С другой стороны, из (7.47) имеем с учётом биективности α^0, что

$$\nu + 1 \leqslant \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) \tag{7.50}$$

(используем также второе выражение в (7.33)). В итоге справедливо (при условии $\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma$) неравенство (7.45), что означает истинность (при условии $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$) импликации

$$\big(\mathrm{pr}_2(\theta) \in \Gamma\big) \Rightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big). \tag{7.51}$$

Стало быть (см. (7.46)), в рассматриваемом случае 2.1) всегда выполняется (7.45). Итак, установлена импликация

$$\big(\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma\big) \Rightarrow \Big(\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)\Big). \tag{7.52}$$

2.2) Пусть теперь $\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma$. Тогда, как легко видеть, $(\Lambda \circ \alpha^0)(s) \neq \mathrm{pr}_2(\theta)$ $\forall s \in \overline{1, N}$. С учётом (7.33) получаем следующее свойство: $\eta(j) \neq \mathrm{pr}_2(\theta)$ $\forall j \in \overline{\nu + 1, \nu + N}$. В силу биективности η это означает, что $\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) \notin \overline{\nu + 1, \nu + N}$ и, стало быть,

$$\eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu + 1, \nu + N}. \tag{7.53}$$

Из (7.33) и (7.53) получаем равенство $\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big) = \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big)$. С учётом (7.34) имеем

$$\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\theta)\big) < \eta^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\theta)\big). \tag{7.54}$$

Отметим две очевидные возможности

$$\big(\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma\big) \vee \big(\mathrm{pr}_1(\theta) \in \Gamma\big). \tag{7.55}$$

Эти две возможности рассмотрим отдельно.

Допустим сначала, что $\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma$. Тогда подобно способу проверки (7.43) устанавливается равенство $\lambda^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) = \eta^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta))$ (т. е. (7.43)), а потому в силу (7.54) имеем (7.45). Итак, установлена импликация

$$(\mathrm{pr}_1(\theta) \notin \Gamma) \Rightarrow \Big(\eta^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) < \eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))\Big) \tag{7.56}$$

(условие $\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma$ предполагается выполненным).

Пусть теперь $\mathrm{pr}_1(\theta) \in \Gamma$. Тогда $w_\theta \triangleq \Lambda^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) \in \overline{1,N}$ и, как следствие, для $\nu + w_\theta \in \overline{\nu+1, \nu+N}$ имеем, что

$$\nu + w_\theta = \lambda^{-1}(\lambda(\nu + w_\theta)) = \lambda^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) < \eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))$$

(учитываем (7.54)). Это означает, что $\nu + 1 < \eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))$. С учётом (7.53) получаем, что

$$\eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta)) \in \overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}}, \tag{7.57}$$

откуда вытекает (см. (7.33)), кстати, что $\eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta)) = \lambda^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))$. Далее, в рассматриваемом случае $(\Lambda \circ \alpha^0)^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) \in \overline{1,N}$, откуда легко выводится свойство $\eta^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) \in \overline{\nu+1, \nu+N}$. С учётом (7.57) получаем неравенство (7.45) при условии $\mathrm{pr}_1(\theta) \in \Gamma$. Итак,

$$(\mathrm{pr}_1(\theta) \in \Gamma) \Rightarrow \Big(\eta^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) < \eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))\Big) \tag{7.58}$$

при условии $\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma$. Тогда из (7.55), (7.56) и (7.58) вытекает при упомянутом условии, что (7.45) имеет место во всех возможных случаях. Импликация

$$(\mathrm{pr}_2(\theta) \notin \Gamma) \Rightarrow \Big(\eta^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) < \eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))\Big) \tag{7.59}$$

установлена. Тогда, согласно (7.39), (7.52) и (7.59), получаем (7.45) в случае 2), т. е. при $\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q$. Итак, имеем импликацию

$$(\theta \in \mathfrak{K} \setminus Q) \Rightarrow \Big(\eta^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) < \eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))\Big). \tag{7.60}$$

Из (7.35), (7.38) и (7.60) получаем окончательное неравенство $\eta^{-1}(\mathrm{pr}_1(\theta)) < \eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(\theta))$ во всех возможных случаях. Поскольку выбор θ был произвольным, установлено, что $\eta^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \eta^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))$ $\forall z \in \mathfrak{K}$. С учётом (7.2) имеем требуемое свойство $\eta \in \mathcal{A}$. □

Рассмотрим естественную процедуру встраивания $(z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}$ в трассу $(\mathbf{h}_i)_{i \in \overline{0,\mathbf{n}}}$ "большой" задачи. С учётом (3.6) и (7.11) имеем, что (см. (7.25))

$$\Big(z_0^0 = (x^0, x^0) = (\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu), \mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_\nu))\Big) \,\&\, \Big(z_t^0 \in L_{(\Lambda \circ \alpha^0)(t)} \times L_{(\Lambda \circ \alpha^0)(t)} \quad \forall t \in \overline{1,N}\Big). \tag{7.61}$$

С другой стороны, имеем (7.10) и, в частности,

$$\mathbf{h}_\nu \in L_{\lambda(\nu)} \times L_{\lambda(\nu)}. \tag{7.62}$$

Наряду с (7.62) из (7.10) легко извлекается свойство

$$\mathbf{h}_{\nu+s} \in L_{\Lambda(s)} \times L_{\Lambda(s)} \quad \forall s \in \overline{1,N}. \tag{7.63}$$

Из (7.11), (7.12) и (7.63) вытекает следующая система включений:

$$\mathbf{h}_{\nu+s} \in M_s \times M_s \quad \forall s \in \overline{1,N}. \tag{7.64}$$

Из (7.7) получаем, в частности, что

$$\mathfrak{C}^{\natural}_{\lambda}[(\mathbf{h}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3, \tag{7.65}$$

где слагаемые в правой части определяются (см. (7.12), (7.30)) выражениями

$$\mathbb{S}_1 \triangleq \sum_{t=0}^{\nu-1} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_t), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{\nu} c^{\natural}_{\lambda(t)}(\mathbf{h}_t), \tag{7.66}$$

$$\mathbb{S}_2 \triangleq \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{t+\nu}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{t+\nu+1})\big) + \sum_{t=1}^{N} c^{\natural}_{\Lambda(t)}(\mathbf{h}_{t+\nu}) + f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\nu+N})\big), \tag{7.67}$$

$$\mathbb{S}_3 \triangleq \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}-1} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_t), \mathrm{pr}_1(\mathbf{h}_{t+1})\big) + \sum_{t=\nu+N+2}^{\mathbf{n}} c^{\natural}_{\lambda(t)}(\mathbf{h}_t) + f^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{h}_{\mathbf{n}})\big). \tag{7.68}$$

Введём кортеж $(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbf{X}\times\mathbf{X}$ посредством условий

$$\big(\tilde{\mathbf{h}}_0 = (x^0, x^0)\big) \,\&\, \big(\tilde{\mathbf{h}}_t \triangleq \mathbf{h}_{\nu+t} \quad \forall t \in \overline{1,N}\big). \tag{7.69}$$

Из (7.67) и (7.69) получаем очевидное равенство

$$\mathbb{S}_2 = \sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}^{\natural}\big(\mathrm{pr}_2(\tilde{\mathbf{h}}_t), \mathrm{pr}_1(\tilde{\mathbf{h}}_{t+1})\big) + \sum_{t=1}^{N} c^{\natural}_{\Lambda(t)}(\tilde{\mathbf{h}}_t) + f\big(\mathrm{pr}_2(\tilde{\mathbf{h}}_N)\big). \tag{7.70}$$

Введём в рассмотрение тождественную перестановку $\mathbf{i}\in\mathbb{P}$, полагая далее, что $\mathbf{i} : \overline{1,N} \to \overline{1,N}$ определяется выражениями $\mathbf{i}(s) \triangleq s \quad \forall s\in\overline{1,N}$. С учётом (3.6) и (7.64) легко проверяется, что

$$(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\mathbf{i}}. \tag{7.71}$$

Отметим теперь, что на самом деле в рассматриваемой конкретизации ОЗ (3.10) $\mathbf{i}\in\mathbf{A}$.

Замечание 7.1. Проверим последнее утверждение, фиксируя $\zeta \in \mathbf{K}$. Тогда $\zeta = \Big(\Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\mathbf{q})\big), \Lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{q})\big)\Big)$, где $\mathbf{q}\in Q$. По свойствам λ имеем неравенство

$$\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\mathbf{q})\big) < \lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{q})\big), \tag{7.72}$$

где $\mathrm{pr}_1(\mathbf{q})\in\Gamma$ и $\mathrm{pr}_2(\mathbf{q})\in\Gamma$, согласно (7.13), причём, как легко видеть,

$$\Big(\Lambda\big(\mathrm{pr}_1(\zeta)\big) = \mathrm{pr}_1(\mathbf{q})\Big) \,\&\, \Big(\Lambda\big(\mathrm{pr}_2(\zeta)\big) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{q})\Big). \tag{7.73}$$

Из (7.73) вытекают (см. (7.12)) следующие два равенства

$$\Big(\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(\mathbf{q})\big) = \nu + \mathrm{pr}_1(\zeta)\Big) \,\&\, \Big(\lambda^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{q})\big) = \nu + \mathrm{pr}_2(\zeta)\Big).$$

С учётом (7.72) получаем, что $\mathrm{pr}_1(\zeta) < \mathrm{pr}_2(\zeta)$. Поскольку $\mathbf{i}$ — тождественная перестановка, а выбор ζ был произвольным, установлено, что $\mathbf{i}\in\mathbf{A}$.

Таким образом, УП $\big(\mathbf{i}, (\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}}\big)$ (см. (7.71)) есть ДР ОЗ (3.10) и, согласно (3.8), определена величина $\mathfrak{C}_{\mathbf{i}}[(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}}] \in [0,\infty[$, причём, как легко видеть,

$$\mathfrak{C}_{\mathbf{i}}[(\tilde{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}}] = \mathbb{S}_2. \tag{7.74}$$

Из (7.31) и (7.74) вытекает очевидное неравенство

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}] \leqslant \mathbb{S}_2. \tag{7.75}$$

Склеивание трасс. Свойство (7.75) характеризует по сути дела факт улучшения (неухудшения) «глобального» ДР. Проверим это. Поскольку $\mathbf{X}\subset\mathfrak{X}$,

$$(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$$

и, стало быть, $z_{t-\nu}^0\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\ \ \forall t\in\overline{\nu,\nu+N}$. С учётом этого введём в рассмотрение кортеж

$$(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}} : \overline{0,\mathbf{n}} \to \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}, \tag{7.76}$$

определяемый следующими правилами:

$$(\hat{\mathbf{h}}_t \triangleq \mathbf{h}_t\ \ \forall t\in\overline{0,\nu})\,\&\,(\hat{\mathbf{h}}_t \triangleq z_{t-\nu}^0\ \ \forall t\in\overline{\nu+1,\nu+N})\,\&\,(\hat{\mathbf{h}}_t \triangleq \mathbf{h}_t\ \ \forall t\in\overline{\nu+N+1,\mathbf{n}}). \tag{7.77}$$

Предложение 7.3. Кортеж (7.76), (7.77) является трассой, согласованной с маршрутом η: $(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\in\mathfrak{Z}_\eta$.

Доказательство следует из определений. Таким образом, $\big(\eta,(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}\big)$ есть ДР «большой» задачи, а потому определено значение $\mathfrak{C}_\eta^\natural[(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}}]\in[0,\infty[$, для представления которого введём

$$\widehat{\mathbb{S}}_1 \triangleq \sum_{t=0}^{\nu-1}\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_t),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{t+1})\big)+\sum_{t=1}^{\nu}c_{\eta(t)}^\natural(\hat{\mathbf{h}}_t), \tag{7.78}$$

$$\widehat{\mathbb{S}}_2 \triangleq \sum_{t=\nu}^{\nu+N}\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_t),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{t+1})\big)+\sum_{t=\nu+1}^{\nu+N+1}c_{\eta(t)}^\natural(\hat{\mathbf{h}}_t), \tag{7.79}$$

$$\widehat{\mathbb{S}}_3 \triangleq \sum_{t=\nu+N+1}^{\mathbf{n}-1}\mathbf{c}^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_t),\mathrm{pr}_1(\hat{\mathbf{h}}_{t+1})\big)+\sum_{t=\nu+N+2}^{\mathbf{n}}c_{\eta(t)}^\natural(\hat{\mathbf{h}}_t)+f^\natural\big(\mathrm{pr}_2(\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{n}})\big). \tag{7.80}$$

В самом деле, согласно (7.7), (7.78)–(7.80) имеем равенство

$$\mathfrak{C}_\eta^\natural[(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,\mathbf{n}}}] = \widehat{\mathbb{S}}_1+\widehat{\mathbb{S}}_2+\widehat{\mathbb{S}}_3. \tag{7.81}$$

Представление (7.78)–(7.80) подобно (7.64)–(7.68). С учётом (7.33), (7.66), (7.77) и (7.78) получаем равенство $\widehat{\mathbb{S}}_1=\mathbb{S}_1$. Кроме того, $\widehat{\mathbb{S}}_2=\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}]$ (данное равенство легко следует из (7.33), (7.77)), а тогда, согласно (7.75),

$$\widehat{\mathbb{S}}_2\leqslant\mathbb{S}_2. \tag{7.82}$$

Наконец, имеем с учётом (7.33) и (7.77) равенство $\widehat{\mathbb{S}}_3=\mathbb{S}_3$. В результате (см. (7.82))

$$\widehat{\mathbb{S}}_1+\widehat{\mathbb{S}}_2+\widehat{\mathbb{S}}_3\leqslant\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2+\mathbb{S}_3. \tag{7.83}$$

Из (7.64), (7.81) и (7.83) вытекает следующее

Предложение 7.4. Встраивание локального ДР $\big(\alpha^0,(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}\big)$ в глобальное ДР $\big(\lambda,(\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,N}}\big)$ «большой» задачи не ухудшает результат: $\mathfrak{C}_\eta^\natural[(\hat{\mathbf{h}}_t)_{t\in\overline{0,N}}]\leqslant\mathfrak{C}_\lambda^\natural[(\mathbf{h}_t)_{t\in\overline{0,N}}]$.

8. Вычислительный эксперимент.

Рассматривалась задача маршрутизации на плоскости: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Предполагалось, что функция $\mathbf{c}^{\natural}$ в (7.6) определена условием $\mathbf{c}^{\natural}(x, y) \overset{\triangle}{=} \rho(x, y)$, где ρ — евклидово расстояние на плоскости; здесь $x \in \mathfrak{X}$ и $y \in \mathfrak{X}$. Условимся, что каждому мегаполису сопоставлен плоский вектор; исполнитель должен прибыть в точку мегаполиса, затем достичь упомянутый вектор, после чего, выбрав произвольный город мегаполиса, переместиться в него и затем покинуть мегаполис. Итак, фиксируем $a_1 \in X, ..., a_{\mathbf{n}} \in X$ и, кроме того, числа

$$\mu_1 \in]0, \infty[, ..., \mu_{\mathbf{n}} \in]0, \infty[.$$

Полагаем, что при всяком $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ функция $c_j^{\natural}$ имеет вид:

$$c_j^{\natural}(x, y) \overset{\triangle}{=} \mu_j(\rho(x, a_j) + \rho(a_j, y)) \ \forall x \in \mathfrak{X} \ \forall y \in \mathfrak{X}.$$

Здесь μ_j играет роль коэффициента замедления или ускорения при выполнении работы, связанной с обслуживанием M_j. Допускается, что для одних мегаполисов реализуется замедление, а для других — ускорение. В отношении $f^{\natural}$ (см. (7.6)) условимся, что при $x \in \mathfrak{X}$ $f^{\natural}(x) = \varsigma\rho(x, (0, 0))$, где $\varsigma \in]0, \infty[$. Полагая $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, мы приходим, следовательно, к замкнутой задаче (по постановке требуется возврат на базу).

Рассматриваемый в настоящей статье способ локальной оптимизации на основе МДП маршрута и трассы обхода системы множеств, полученных в результате применения приближенного алгоритма, был реализован в виде программы для ПЭВМ. В качестве приближенного метода использована адаптированная под специфику данной задачи версия известного жадного алгоритма [23], для которой принято название «иди в ближайший». Программа написана на языке программирования C++ (использована среда разработки Embarcadero C++ Builder XE5), работающая в 64-х разрядной операционной системе семейства Windows не ниже Windows 7. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического отображения траектории движения по множествам и увеличения отдельных участков графика; возможно сохранение изображения в файл графического формата bmp. Программа предоставляет возможность ввода индекса ν, начиная с которого производится локальная оптимизация, а также длины оптимизируемого участка исходного маршрута N. Применение локальной оптимизации будет носить итерационный характер: сначала оптимизируется участок доставляемой жадным алгоритмом траектории (1-я итерация), а далее применяется локальная оптимизации к маршруту и трассе, получаемым на предыдущей итерации.

Вычислительный эксперимент проводился на портативном компьютере (notebook) с центральным процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 6 гБ с установленной операционной системой Windows 7 x64 SP1 Максимальная.

В нашем примере рассматривается задача обхода 60 мегаполисов $(\mathbf{n} = 60)$ на плоскости. Множества являются равномерными сетками на окружностях по 12 точек в каждой. Еще раз отметим, что функции $\mathbf{c}^{\natural}$ и $(\mathbf{c}_i^{\natural})_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}}$ в (7.6) заданы посредством евклидова расстояния, при использовании в $\mathbf{c}_1^{\natural}, ..., \mathbf{c}_{\mathbf{n}}^{\natural}$ соответствующих коэффициентов $\mu_1, ..., \mu_{\mathbf{n}}$, а внутренние работы в мегаполисах заключаются в переходе из точки входа в некоторую точку, ассоциированную с мегаполисом (для выполнения в ней некоторых внутренних работ) и затем перемещении в точку выхода из мегаполиса. В нашем примере начальная точка $\mathbf{x}^0$ совпадает с началом координат, а условия предшествования (множество $\mathfrak{K}$) заданы посредством указания 47 адресных пар. Описания мегаполисов (перечисление точек) и адресных пар опустим по соображениям объема. При реализации процедуры локальной оптимизации на всех итерациях «длина» оптимизируемого участка траектории равна 15 $(N = 15)$.

Приведем численные результаты работы программы (явное указание маршрута и трассы опускаем по соображениям объема). В результате применения жадного алгоритма получили величину совокупных затрат 4988,18, время счета составило менее 1 с. Полученная траектория движения приведена на рис. 1.

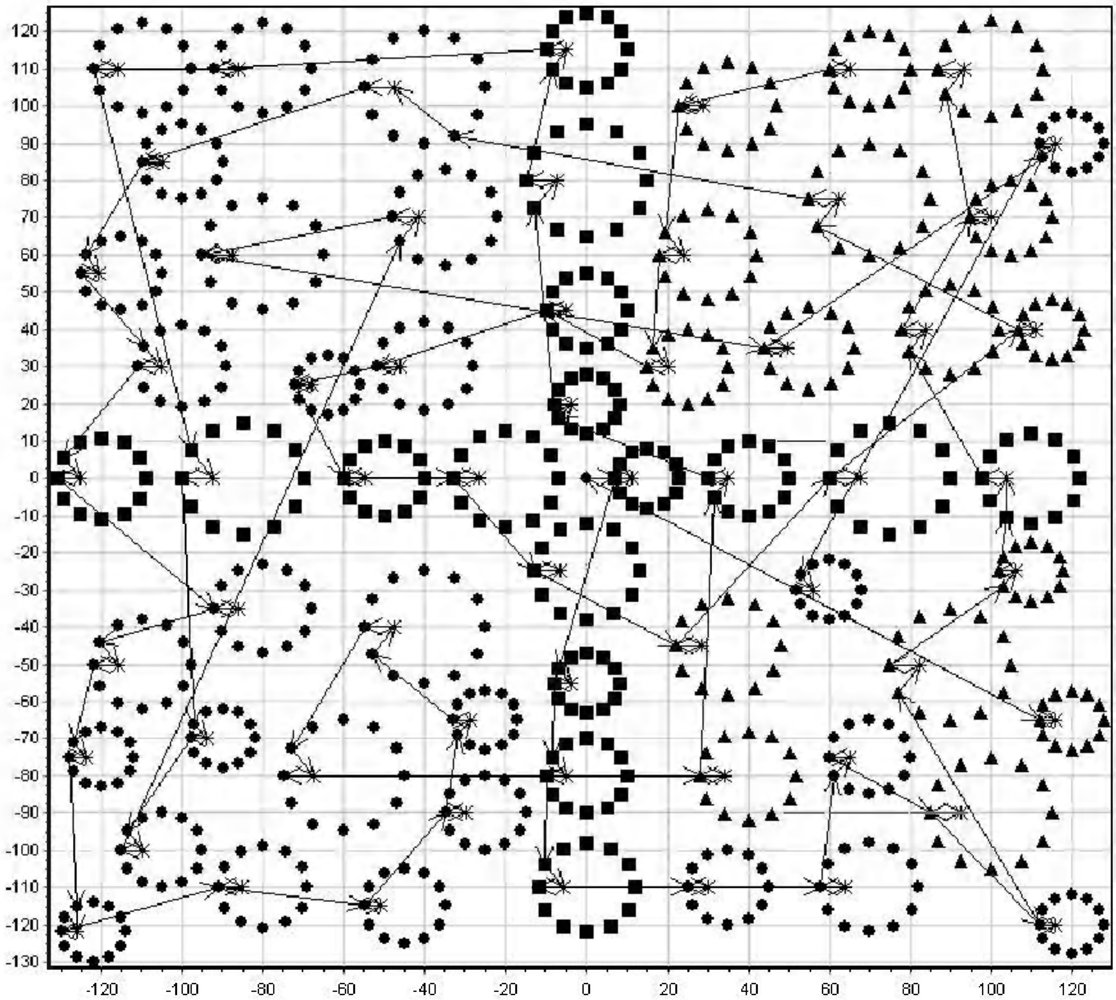

Рис. 1. Маршрут и трасса обхода множеств после применения жадного алгоритма

Мы провели 12 итераций, заключающихся в локальной оптимизации маршрута и трассы. Приведем кратко их результаты (величины совокупных затрат):

1-я итерация (со 2-го пункта маршрута): 4851,2.

2-я итерация (с 16-го пункта маршрута): 4842,36.

3-я итерация (с 44-го пункта маршрута): 4693,58.

4-я итерация (с 30-го пункта маршрута): 4646,02.

5-я итерация (с 10-го пункта маршрута): 4646,02.

6-я итерация (с 25-го пункта маршрута): 4646,02.

7-я итерация (с 40-го пункта маршрута): 4612,44.

8-я итерация (с 35-го пункта маршрута): 4582,09.

9-я итерация (с 28-го пункта маршрута): 4539,79.

10-я итерация (с 23-го пункта маршрута): 4539,78.

11-я итерация (с 42-го пункта маршрута): 4536,53.

12-я итерация (с 3-го пункта маршрута): 4536,53.

Время счета на каждой итерации всякий раз получалось разное; оно колеблется от 4 с до 3 мин. 1 с. При этом оно сильно зависит от того, сколько адресных пар, заданных для исходной системы мегаполисов, попало в данный подлежащий оптимизации участок траектории. Улучшение результата по сравнению с жадным алгоримом составило около 9 процентов.

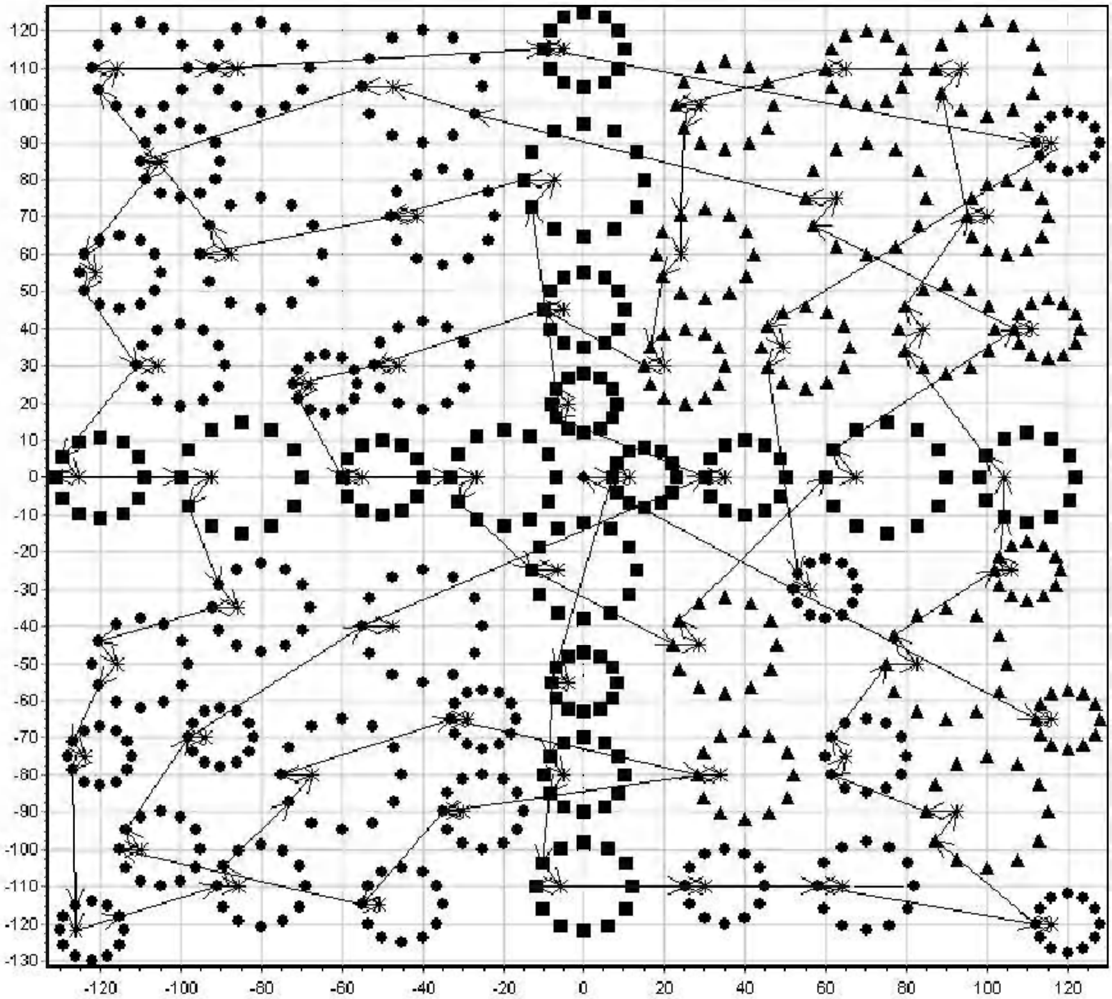

Рис. 2. Маршрут и трасса обхода множеств после многократной локальной оптимизации

Как видно из приведенных числовых результатов, не всякая итерация являет результативной в плане улучшения результата, мы остановились на 12-й итерации, обнаружив, что уменьшение величины совокупных затрат прекратилось.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3-34.
2. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3-29.
3. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3-26.
4. *Беллман Р.* Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере / Кибернетический сборник. Т. 9. М.: Мир, 1964.
5. *Хелд М., Карп Р.М.* Применение динамического программирования к задачам упорядочения / Кибернетический сборник. Т.9. М.:Мир, 1964.

6. *Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.* Алгоритмы для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т.1. Вып. 4. С. 94-107.

7. *Ташлыков О.Л., Сесекин А.Н., Щеклеин С.Е., Ченцов А.Г.* Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115-120.

8. *Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Щеклеин С.Е., Куклин М.Ю., Ченцов А.Г., Кадников А.А.* Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2006. № 2. С. 41-48.

9. *Сергеев С.И.* Гибридные системы управления и динамическая задача коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 45-54.

10. *Ченцов А.Г.* Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Москва; Ижевск: РХД. 2008. 238 с.

11. *Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Метод итераций в задаче маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. №4. С. 268-287.

12. *Ченцов А.А., Ченцов А.Г.* К вопросу о решении задачи последовательного обхода множеств с использованием "незамкнутой"задачи коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2002. №11. С. 151-166.

13. *Ченцов А.А., Ченцов А.Г.* Редукция задач маршрутной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2000. №10. С. 136-150.

14. *Ченцов А.А.* Метод итераций в задаче последовательного обхода множеств (обобщенная задача коммивояжера на узкие места) // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: [Сб. науч. тр.]: Екатеринбург: УрО РАН. 2002. Вып. 6. С. 209-230.

15. *Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.* Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 68-77.

16. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир. 1970. 416 с.

17. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир. 1964. 430 с.

18. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990. 960 с.

19. *Петунин А.А.* О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т.13. № 2 (35). С. 280-286.

20. *Петунин, А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Серия: Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. № 2 (169). С. 103-111.

21. *Ченцов А.Г.* Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. 18 (277). № 12. С. 53-75.

22. *Ченцов А.Г.* Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 134-149.

23. *Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.* Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 3. С. 183-201.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках программ Президиума РАН (проекты № 12-П-1-1012, № 12-П-1-1019) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты "№ 12-01-00537, № 13-08-00643, № 13-01-90414 Укр_ф_а).

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Chentsov A.A., Chentsov A.G.

THE PROBLEM OF MEGALOPOLISES CONSISTENT DETOURING

The problem of visiting a finite system of megalopolises with precedence conditions is under discussion; visiting megalopolises is accompanied by some work execution. It is assumed that transference and work expenses aggregate additively. The version of broadly understood dynamical programming is considered on which basis the optimal algorithm is build and then performed on PC. For a high dimensional problem, a method of the route improving is offered; it is done by means of the local Bellman embedding with provision for the precedence conditions.

Key words: route; trace; dynamical programming; precedence conditions

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом управляемых систем, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Alexander Georgiyevich, Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head Managed Systems Department, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Alexey Aleksandrovich, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, e-mail: chentsov@imm.uran.ru