

УДК 517.51

СУПЕРПОЗИЦИОННАЯ ИЗМЕРИМОСТЬ ПРИ ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЯХ КАРАТЕОДОРИ

© И. В. Шрагин

Ключевые слова: σ -алгебра; борелевские множества; суперпозиционная измеримость; условия Каратеодори.

Доказывается суперпозиционная измеримость функции $f: T \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (на множестве T задана σ -алгебра), измеримой на T и непрерывной слева по каждому $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$.

1. Введение

Пусть T — непустое множество, $\mathcal{T}$ — σ -алгебра на T , т. е. $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство. Если X — метрическое пространство, то через $\mathcal{B}(X)$ обозначим совокупность всех борелевских множеств в X .

Функция $\varphi: T \rightarrow X$ называется $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(X))$ -измеримой, если $(\forall B \in \mathcal{B}(X)) \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Обозначим через $\langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(X) \rangle$ множество всех таких функций.

Далее для функции $\varphi: T \rightarrow X$ рассматривается функция $G_\varphi: T \rightarrow T \times X$, где $G_\varphi(t) = (t, \varphi(t))$ (так что $G_\varphi(T)$ — график функции φ).

Пусть заданы измеримое пространство $(T, \mathcal{T})$ и метрические пространства X и Y , а также функция $f: T \times X \rightarrow Y$. Рассмотрим для функций $\varphi: T \rightarrow X$ суперпозиции $f \circ G_\varphi: T \rightarrow Y$, т. е. $(f \circ G_\varphi)(t) = f(t, \varphi(t))$.

О п р е д е л е н и е 1. Функция f называется *суперпозиционно измеримой* (короче: суп-измеримой), если $\forall \varphi \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(X) \rangle$ суперпозиция $f \circ G_\varphi \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(Y) \rangle$.

Каратеодори [1, § 577] доказал суп-измеримость функции $f: (a, b) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, измеримой по Лебегу на (a, b) при каждом $x = (x_1, \dots, x_m)$ и непрерывной по каждому $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, в отдельности при любом $t \in (a, b)$.

Нашей целью является доказательство суп-измеримости функции $f: T \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ при более общих условиях. А именно, мы будем предполагать, что выполняются условия:

(C₁) $(\forall x \in \mathbb{R}^m) f(\cdot, x) \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$;

(C₂) $(\forall t \in T)$ функция $f(t, \cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна слева по каждому $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, в отдельности.

2. Вспомогательные предложения

Пусть $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство, а X и Y — метрические пространства. Обозначим через Λ произведение $\mathcal{T} \times \mathcal{B}(X)$, т. е. σ -алгебру на $T \times X$, порожденную системой $\{A \times B: A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{B}(X)\}$.

Л е м м а 1. Функция $\varphi \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(X) \rangle$ тогда и только тогда, когда $G_\varphi \in \langle \mathcal{T}, \Lambda \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varphi \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(X) \rangle$, то при $A \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{B}(X)$

$$G_\varphi^{-1}(A \times B) = \{t \in T: (t, \varphi(t)) \in A \times B\} = A \cap \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{T},$$

откуда, как хорошо известно (см., например, [2], Предложение II.1.1), следует, что $(\forall D \in \Lambda) G_\varphi^{-1}(D) \in \mathcal{T}$, т. е. $G_\varphi \in \langle \mathcal{T}, \Lambda \rangle$. Обратная импликация очевидна. $\square$

Л е м м а 2. Если функция $f: T \times X \rightarrow Y$ ($\Lambda, \mathcal{B}(Y)$)-измерима, то она суп-измерима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(X) \rangle$ и $C \in \mathcal{B}(Y)$. Тогда $(f \circ G_\varphi)^{-1}(C) = G_\varphi^{-1}[f^{-1}(C)] \in \mathcal{T}$ в силу Леммы 1 (так как $f^{-1}(C) \in \Lambda$). $\square$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^m$ ($m > 1$), снабженное какой-либо метрикой с покомпонентной сходимостью. Положим

$$[\mathcal{B}(\mathbb{R})]^m = \{B_1 \times \dots \times B_m : B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k = 1, \dots, m\}.$$

Хорошо известно, что система $[\mathcal{B}(\mathbb{R})]^m$ порождает σ -алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ (см., например, [3, с. 154], где рассмотрен случай $m = 2$, или [4, Лемма 4]).

Пусть дана функция $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$, т. е. $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$, где $\varphi_k(t) \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$.

Л е м м а 3. Функция $\varphi \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rangle$ тогда и только тогда, когда $\varphi_k \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$, $k = 1, \dots, m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rangle$. Возьмем $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и положим $B_k = \mathbb{R}$ при $k \neq p$ и $B_p = B$. Тогда $\varphi_p^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B_1 \times \dots \times B_m)$. Т. к. $B_1 \times \dots \times B_m \in [\mathcal{B}(\mathbb{R})]^m \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, то $\varphi_p^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, т. е. $\varphi_p \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$, $p = 1, \dots, m$.

Обратно, пусть $\varphi_k \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$, $k = 1, \dots, m$. Тогда если $(\forall k) B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $\varphi^{-1}(B_1 \times \dots \times B_m) = \bigcap_k \varphi_k^{-1}(B_k) \in \mathcal{T}$. Но т. к. система $[\mathcal{B}(\mathbb{R})]^m$ порождает σ -алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, то $\varphi \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rangle$. $\square$

3. Основные результаты

Рассмотрим сначала случай, когда $m = 1$.

Т е о р е м а 1. Если функция $f: T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (C_1) и (C_2) (при $m = 1$), то $f \in \langle \mathcal{T} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $a \in \mathbb{R}$ и докажем, что

$$f^{-1}([a, \infty)) = E_a := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{t : f(t, r) > a - n^{-1}\} \times (r, r + n^{-1})]. \quad (1)$$

Действительно, пусть $(t, x) \in f^{-1}([a, \infty))$, т. е. $f(t, x) \geq a$. Тогда $(\forall n) \in \mathbb{N}$ $f(t, x) > a - n^{-1}$, и, в силу (C_2) , существуют такие $r \in (x - n^{-1}, x) \cap \mathbb{Q}$, что $f(t, r) > a - n^{-1}$. Так как $x \in (r, r + n^{-1})$, то $(t, x) \in E_a$.

Обратно, если $(t, x) \in E_a$, то $\forall n$ существует такое $r_n \in \mathbb{Q}$, что $f(t, r_n) > a - n^{-1}$ и $x \in (r_n, r_n + n^{-1})$, т. е. $x - n^{-1} < r_n < x$. Отсюда и из (C_2) следует, что $f(t, x) \geq a$.

Итак, равенство (1) доказано, а из него следует, что $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{T} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Но так как система $\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ порождает σ -алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [3, Prop. 1.1.3], то $f \in \langle \mathcal{T} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$. $\square$

Из Теоремы 1 и Леммы 2 вытекает

С л е д с т в и е 1. В условиях Теоремы 1 функция f суп-измерима.

Т е о р е м а 2. Если функция $f: T \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (C_1) и (C_2) , то она суп-измерима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по m . При $m = 1$ теорема верна в силу Следствия 1. Предположив, что она верна при $m = p - 1$, докажем ее при $m = p > 1$.

Возьмем произвольную функцию $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \rangle$. Согласно Лемме 3 $\varphi_k \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$, $k = 1, \dots, p$. Рассмотрим функцию $g: T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенную равенством

$g(t, x) = f(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_{p-1}(t), x)$. Эта функция удовлетворяет условиям (C_1) и (C_2) при $m = 1$ (в частности, (C_1) выполняется в силу нашего предположения). Тогда по Следствию 1 функция g суп-измерима, так что $g \circ G_{\varphi_p} \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$. Но т. к.

$$(f \circ G_{\varphi})(t) = f(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)) = g(t, \varphi_p(t)) = (g \circ G_{\varphi_p})(t),$$

то $f \circ G_{\varphi} \in \langle \mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$, т. е. функция $f: T \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ суп-измерима. $\square$

Нетрудно проверить, что Теорема 2 останется верной, если в условии (C_2) заменить непрерывность слева непрерывностью справа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reelle Funktionen. N-Y.: Chelsea Publ. Comp., 1968. 718 s.
2. *Исаа́ Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 310 с.
3. *Cohn D.L.* Measure theory. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1980. 373 p.
4. *Шрагин И.В.* Суперпозиционная измеримость // Изв. высш. уч. завед. Математика. 1975. № 1. С. 82-92.

Поступила в редакцию 18 июля 2013 г.

Shragin I.V.

SUPERPOSITIONAL MEASURABILITY UNDER GENERALIZED CARATHÉODORY CONDITIONS

We prove superpositional measurability of the function $f: T \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (a σ -algebra is defined on T) which is measurable on T and continuous from the left on every $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$.

Key words: σ -algebra; Borel sets; superpositional measurability; Carathéodory conditions.

Шрагин Исаак Вениаминович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: is.shragin@mail.ru

Shragin Isaak Veniaminovich, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, e-mail: is.shragin@mail.ru