# Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.98

## Взаимодействие преобразований Пуассона с операторами Ли надгруппы для тензорных произведений [1]

© В. Ф. Молчанов

*Ключевые слова*: пара-эрмитовы пространства; канонические представления; надгруппы; преобразования Пуассона.

Для группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ мы пишем явные формулы для композиций операторов Ли надгруппы $G \times G$ с преобразованиями Пуассона $M_k^{(l,m)}$, сплетающими неприводимые конечномерные представления $T_k$ группы $G$ с тензорными произведениями $T_l \otimes T_m$.

Мы продолжаем тематику, начатую в нашей работе [3], см. также [1], [4] и библиографию там же. Ее основная цель состоит в том, чтобы изучить взаимодействие преобразований Пуассона для однородного пространства $G/H$ с операторами Ли надгруппы $\widetilde{G}$. В предыдущих работах мы рассматривали представления группы $G$ в *бесконечномерных* пространствах функций на $G/H$, в данной работе мы имеем дело с *конечномерными* представлениями. А именно, для группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ мы пишем явные формулы для композиций операторов Ли надгруппы $\widetilde{G} = G \times G$ с преобразованиями Пуассона $M_k^{(l,m)}$, сплетающими неприводимые конечномерные представления $T_k$ группы $G$ с тензорными произведениями $T_l \otimes T_m$. Тензорное произведение $T_l \otimes T_m$ эквивалентно представлению группы $G$ в функциях на однополостном гиперболоиде $G/H$ в $\mathbb{R}^3$, индуцированному характером диагональной подгруппы $H$, см. [2]. Однако сейчас мы не будем использовать эту реализацию представления $T_l \otimes T_m$.

[1] Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00952 и Госзаданием Минобрнауки 1.3445.2011.

Группа $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц второго порядка с определителем единица:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Всякое конечномерное неприводимое представление $T_l$ группы $G$ задается числом $l$ (*старшим весом*), таким, что $2l \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Оно действует в пространстве $V_l$ многочленов $\varphi(x)$ от $x$ степени $\leqslant 2l$ (так что $\dim V_l = 2l+1$) по формуле

$$(T_l(g)\,\varphi)\,(x) = \varphi(x \cdot g\,)\,(\beta x + \delta)^{2l}, \quad x \cdot g = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\,,$$

мы считаем, что $G$ действует справа.

Пространство $W_{lm} = V_l \otimes V_m$ (тензорное произведение) состоит из многочленов $\varphi(x,y)$ от $x, y$ степени $\leqslant 2l$ по $x$ и степени $\leqslant 2m$ по $y$. В этом пространстве $W_{lm}$ действует представление $\widetilde{R}_{lm}$ группы ("надгруппы") $\widetilde{G} = G \times G$:

$$\left(\widetilde{R}_{lm}(g_1, g_2)\varphi\right)(x,y) = \varphi(x \cdot g_1\,,\, y \cdot g_2\,)\,(\beta_1 x + \delta_1)^{2l}\,(\beta_2 y + \delta_2)^{2m}.$$

В группе $\widetilde{G}$ естественно выделяются три подгруппы, изоморфные $G$. Первая из них, обозначим ее $G^d$, есть диагональ, состоящая из пар $(g,g)$, $g \in G$. Еще имеются две компонентные подгруппы, обозначим их $G_1$ и $G_2$, состоящие, соответственно, из пар $(g, E)$ и $(E, g)$, где $E$ – единичная матрица, $g \in G$.

Ограничение представления $\widetilde{R}_{lm}$ на группу $G^d$ есть тензорное произведение $R_{lm} = T_l \otimes T_m$ представлений $T_l$ и $T_m$ группы $G$:

$$(R_{lm}(g)\varphi)\,(x,y) = \varphi(x \cdot g\,,\, y \cdot g\,)\,(\beta x + \delta)^{2l}\,(\beta y + \delta)^{2m}.$$

Обозначим

$$r = m - l.$$

Известно, что тензорное произведение $R_{lm}$ раскладывается в прямую однократную сумму:

$$R_{lm} = T_{|r|} + T_{|r|+1} + \ldots + T_{l+m-1} + T_{l+m}\,, \tag{1}$$

соответственно пространство $W_{lm}$ разлагается в сумму подпространств:

$$W_{lm} = W_{|r|}^{(l,m)} + W_{|r|+1}^{(l,m)} + \ldots + W_{l+m-1}^{(l,m)} + W_{l+m}^{(l,m)}\,,$$

инвариантных и неприводимых относительно $R_{lm}$. Ограничение представления $R_{lm}$ на $W_k^{(l,m)}$ эквивалентно $T_k$. В [2] мы нашли в явном виде операторы $M_k^{(l,m)}$ (мы называем их преобразованиями Пуассона), сплетающие представления $T_k$ из правой части (1) с представлением $R_{lm}$, см. теорему 1 ниже. Оказывается, что они являются дифференциальными операторами порядка $k + r$. Мы будем использовать следующее обозначение для "обобщенных степеней" (мы предпочитаем его символу Похгаммера):

$$a^{[s]} = a\,(a+1)\ldots(a+s-1).$$

здесь $a$ – число или оператор, $s \in \mathbb{N}$.

**Теорема 1** ([2]) *Сплетающие операторы* $M_k^{(l,m)} : V_k \to W_k^{(l,m)}$ *даются следующей формулой:*

$$\left(M_k^{(l,m)}\varphi\right)(x,y) = \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (k-r+1)^{[s]} \times \\ \times \ (y-x)^{2m-s} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k+r-s} \varphi(x). \qquad (2)$$

Отметим, что эти сплетающие операторы можно записать в виде композиции дифференциальных операторов первого порядка:

$$M_k^{(l,m)} = (y-x)^{l+m-k} \left\{(y-x)\frac{d}{dx} + k - r + 1\right\}^{[k+r]}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$ состоит из вещественных матриц второго порядка со следом 0. Базис в ней состоит из матриц:

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L_+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Соотношения коммутации таковы:

$$[L_+, L_-] = -2L_1, \quad [L_+, L_1] = -L_+, \quad [L_1, L_-] = -L_-.$$

Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порождаемое представлением группы $G$, мы обозначаем тем же символом, что и само исходное представление группы $G$. Для базисных элементов (3) из $\mathfrak{g}$ имеем

$$T_l(L_-) = \frac{d}{dx},$$
$$T_l(L_1) = x\frac{d}{dx} - l,$$
$$T_l(L_+) = x^2\frac{d}{dx} - 2l\,x. \qquad (4)$$

Алгебра Ли надгруппы $\widetilde{G}$ есть прямая сумма $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}$, а алгебры Ли $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ подгрупп $G^d$, $G_1$, $G_2$ состоят соответственно из пар $(X,X)$, $(X,0)$, $(0,X)$, где $X \in \mathfrak{g}$.

Мы хотим найти явные формулы для композиций $\widetilde{R}_{lm}(\widetilde{X})M_k^{(l,m)}$, где $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Для $\widetilde{X} \in \mathfrak{g}^d$ ответ прост, поскольку преобразование Пуассона $M_k^{(l,m)}$ – сплетающий оператор. В самом деле, тогда $\widetilde{X} = (X,X)$, $\widetilde{R}_{lm}(\widetilde{X}) = R_{lm}(X)$ и потому

$$\widetilde{R}_{lm}(X,X)M_k^{(l,m)} = M_k^{(l,m)}T_k(X). \qquad (5)$$

Поэтому достаточно брать $\widetilde{X}$ из какого-нибудь подпространства в $\widetilde{\mathfrak{g}}$, дополнительного к $\mathfrak{g}^d$. В качестве такового мы сначала возьмем подалгебру $\mathfrak{g}_2$. Обозначим

$$\alpha_k^{(l,m)} = \frac{(2m-k-r)(k-r+1)}{2(k+1)(2k+1)} = \frac{(l+m-r)(l-m+k+1)}{2(k+1)(2k+1)}, \tag{6}$$

$$\beta_k^{(l,m)} = \frac{k(k+1)+r(2m-r+1)}{2k(k+1)} = \frac{k(k+1)+(m-l)(l+m+1)}{2k(k+1)}, \tag{7}$$

$$\gamma_k^{(l,m)} = -\frac{(2m+k-r+1)(k+r)}{2k(2k+1)} = -\frac{(l+m+k+1)(k+m-l)}{2k(2k+1)}. \tag{8}$$

**Теорема 2** *Пусть $X \in \mathfrak{g}$. Оператор $\widetilde{R}_{lm}(0,X)$ взаимодействует с преобразованием Пуассона $M_k^{(l,m)}$, где $k = |r|, |r|+1, \ldots, l+m$, следующим образом:*

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{lm}(0,X)M_k^{(l,m)} &= \alpha_k^{(l,m)} M_{k+1}^{(l,m)} A_k(X) + \\ &+ \beta_k^{(l,m)} M_k^{(l,m)} T_k(X) + \gamma_k^{(l,m)} M_{k-1}^{(l,m)} C_k(X), \end{aligned}$$

*где $A_k(X)$, $C_k(X)$ – дифференциальные операторы на $\mathbb{R}$, линейно зависящие от $X \in \mathfrak{g}$. Для базисных элементов* (3) *мы имеем:*

$$\begin{aligned} &A_k(L_-) = 1\,, \quad C_k(L_-) = \frac{d^2}{dx^2}\,, \\ &A_k(L_1) = x\,, \quad C_k(L_1) = x\frac{d^2}{dx^2} - (2k-1)\frac{d}{dx}\,, \\ &A_k(L_+) = x^2, \quad C_k(L_+) = x^2\frac{d^2}{dx^2} - 2(2k-1)x\frac{d}{dx} + 2k(2k-1). \end{aligned}$$

Приведем набросок доказательства. Для краткости мы не пишем верхние индексы $l, m$. Сначала в качестве $X$ возьмем $L_-$. Мы имеем $\widetilde{R}_{lm}(0, L_-) = \partial/\partial y$. Применим это дифференцирование по $y$ к (2). Предположим, что полученная функция $(\partial/\partial y)M_k\varphi$ есть линейная комбинация трех функций $M_{k+1}\varphi$, $M_k\varphi'$, $M_{k-1}\varphi''$, штрих означает дифференцирование по $x$, т. е. существуют числа $\alpha_k$, $\beta_k$, $\gamma_k$ такие, что

$$\frac{\partial}{\partial y} M_k\varphi = \alpha_k M_{k+1}\varphi + \beta_k M_k\varphi' + \gamma_k M_k\varphi''. \tag{9}$$

Сравнивая коэффициенты при старших производных $\varphi^{(k+r+1)}$, $\varphi^{(k+r)}$, $\varphi^{(k+r-1)}$, мы получим систему трех линейных уравнений для $\alpha_k$, $\beta_k$, $\gamma_k$. Заметим, что первое из этих уравнений есть $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 0$. Решая систему, мы получаем (6), (7), (8). Дальше проверяем, что соответствующее равенство справедливо для коэффициентов при каждой производной $\varphi^{(s)}$ в (9).

Для $X = L_1$ и $X = L_+$ мы используем соотношения коммутации. Так как $[L_+, L_-] = -2L_1$, то $[(L_+, L_+), (0, L_-)] = -2(0, L_1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} -2\,\widetilde{R}_{lm}(0, L_1) &= \widetilde{R}_{lm}\big([(L_+, L_+), (0, L_-)]\big) \\ &= R_{lm}(L_+)\widetilde{R}_{lm}(0, L_-) - \widetilde{R}_{lm}(0, L_-)R_{lm}(L_+). \end{aligned} \tag{10}$$

Применим (10) к $M_k\varphi$. Используя (5) и полученные выражения для $L_-$, получаем

$$-2\widetilde{R}_{lm}(0, L_1)M_k\varphi = \alpha_k\, M_{k+1}\left\{T_{k+1}(L_+)\varphi - T_k(L_+)\varphi\right\} +$$

$$+\, \beta_k\, M_k\left\{T_k(L_+)\varphi' - (T_k(L_+)\varphi)'\right\} +$$

$$+\, \gamma_k\, M_{k-1}\left\{T_{k-1}(L_+)\varphi'' - (T_k(L_+)\varphi)''\right\}.$$

Подставляя сюда (4), получаем формулы теоремы для $L_1$. Аналогично поступаем с $L_+$, используя коммутационное соотношение $[L_+, L_1] = -L_+$, из которого следует $[(L_+, L_+), (0, L_1)] = -(0, L_+)$. □

## Литература


1. В. Ф. Молчанов. Канонические представления и надгруппы для гиперболоидов. Функц. анализ и его прил., 2005, том 39, вып.4, 48–61.

2. В. Ф. Молчанов. Преобразования Пуассона для тензорных произведений представлений группы матриц второго порядка. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2013, том 18, вып. 5, 2613–2616.

3. V. F. Molchanov. Canonical representations and overgroups. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 2003, vol. 210, 213–224.

4. V. F. Molchanov. Canonical representations on Lobachevsky spaces: an interaction with an overalgebra. Acta Math. Appl., 2007, vol. 99, No. 3, 321–337


*Поступила в редакцию 16 ноября 2013 года*

V. F. Molchanov. Interaction of Poisson transforms with Lie operators for tensor products

For the group $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, we write explicit formulae for compositions of Lie operators of the overgroup $G \times G$ with Poisson transforms $M_k^{(l,m)}$ intertwining irreducible finite-dimensional representations $T_k$ of $G$ with tensor products $T_l \otimes T_m$.

*Keywords*: para-Hermitian spaces; canonical representations; overgroups; Poisson transforms.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Molchanov Vladimir Fedorovich, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of physics and mathematics, Professor, Head of mathematical analysis chair, e-mail: v.molchanov@bk.ru