УДК 517.98

Асимптотическое разложение преобразования Березина для однополостного гиперболоида [1]

© В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова

Ключевые слова: пара-эрмитовы симметрические пространства; гиперболоиды; полиномиальное квантование; исчисления символов.

Предлагаются новые формулы для коэффициентов полного асимптотического разложения преобразования Березина на однополостном гиперболоиде в $\mathbb{R}^3$.

В работе [1] мы построили полиномиальное квантование на однополостном гиперболоиде $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}^3$. В частности, была написана явная формула для полного асимптотического разложения преобразования Березина. Коэффициенты разложения являются многочленами от оператора Лапласа–Бельтрами на $\mathcal{X}$. В настоящей работе мы предлагаем две формулы для этих коэффициентов. В первой из них коэффициенты представлены в виде произведения *линейных* дифференциальных операторов, во второй они записаны в наиболее компактном виде.

Напомним некоторый материал из [1].

Группа $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц второго порядка с определителем единица:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X второго порядка со следом 0. Возьмем в ней следующий базис:

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L_+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Всякое конечномерное неприводимое представление группы G задается числом l (старшим весом), таким, что $2l \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$. Оно действует в пространстве V_l многочленов $\varphi(t)$ от t степени $\leqslant 2l$ (размерность V_l равна $2l+1$) по формуле

$$(\pi_l(g)\,\varphi)\,(t) = \varphi\left(\widetilde{t}\,\right) \cdot (\beta z + \delta)^{2l}, \quad \widetilde{t} = \frac{\alpha t + \gamma}{\beta t + \delta}.$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00952 и Госзаданием Минобрнауки 1.3445.2011.

Меняя местами α с δ и β с γ, мы получим контраградиентное представление $\widehat{\pi}_l$ группы G, оно действует в пространстве V_l по формуле

$$(\widehat{\pi}_l(g)\,\varphi)\,(t) = \varphi\left(\widehat{t}\right)\cdot(\gamma t+\alpha)^{2l}, \quad \widehat{t} = \frac{\delta t+\beta}{\gamma t+\alpha}\,.$$

Представления π_l и $\widehat{\pi}_l$ эквивалентны. Для базисных элементов (1) из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\pi_l(L_-) = -\widehat{\pi}_l(L_+) = \frac{d}{dt}\,,$$
$$\pi_l(L_1) = -\widehat{\pi}_l(L_1) = t\,\frac{d}{dt} - l,$$
$$\pi_l(L_+) = -\widehat{\pi}_l(L_-) = t^2\,\frac{d}{dt} - 2l\,.$$

Одночлены 1 (тождественная единица) и t^{2l} являются минимальными векторами, то есть аннулируются элементом L_-, для представлений π_l и $\widehat{\pi}_l$, соответственно.

Пусть $\mathcal{X}$ обозначает однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$, задаваемый уравнением

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Его можно реализовать как множество матриц

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-x_3 & x_2-x_1 \\ x_2+x_1 & 1+x_3 \end{pmatrix}$$

с определителем, равным нулю. Группа G действует транзитивно на этих матрицах сопряжениями:

$$x \mapsto g^{-1}xg. \tag{2}$$

Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты ξ, η:

$$x = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad N = 1-\xi\eta.$$

Они определены на всем $\mathcal{X}$, кроме $x_3 = -1$. Действие (2) в этих координатах разделяется: если x имеет координаты ξ, η, то $g^{-1}xg$ имеет координаты $\widetilde{\xi}$, $\widehat{\eta}$.

Действие группы G на функциях f на $\mathcal{X}$ сдвигами обозначим через U:

$$(U(g)f)(x) = f\left(g^{-1}xg\right),$$

в орисферических координатах:

$$(U(g)f)(\xi,\eta) = f\left(\widetilde{\xi},\,\widehat{\eta}\right).$$

Базисным элементам (1) из $\mathfrak{g}$ отвечают операторы

$$\begin{aligned} U(L_-) &= \frac{\partial}{\partial\xi} - \eta^2\frac{\partial}{\partial\eta}, \\ U(L_1) &= \xi\frac{\partial}{\partial\xi} - \eta\frac{\partial}{\partial\eta}, \\ U(L_+) &= \xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}. \end{aligned}$$

Оператор Лапласа–Бельтрами Δ на $\mathcal{X}$ есть:

$$\Delta = N^2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}. \tag{3}$$

Многочлен f на $\mathbb{R}^3$ называется *гармоническим* относительно группы G, если он обращается в нуль оператором $\partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$, где $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Обозначим через $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ и $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ ограничения на $\mathcal{X}$ пространства гармонических многочленов и однородных гармонических многочленов степени k, соответственно. Отображение ограничения биективно. Пространство $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ совпадает с пространством ограничений на $\mathcal{X}$ *всех* многочленов на $\mathbb{R}^3$. Пространство $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ инвариантно и неприводимо относительно U, соответствующее представление эквивалентно π_k. В орисферических координатах элементы пространства $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ представляют собой деленные на N^k многочлены от ξ, η из старшей компоненты тензорного произведения для $\pi_{k/2}\otimes\widehat{\pi}_{k/2}$. Многочлены из $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ являются собственными для оператора Лапласа–Бельтрами:

$$\Delta f = k(k+1)f, \quad f\in\mathcal{H}_k(\mathcal{X}), \tag{4}$$

а минимальным вектором является многочлен

$$f_k(x) = \left(\frac{\eta}{N}\right)^k = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^k.$$

В полиномиальном квантовании основным объектом является преобразование Березина $\mathcal{B}_\sigma$, $\sigma\in\mathbb{C}$, см. [1]. Оно переводит контравариантные символы в ковариантные символы, его ядро также участвует в умножении ковариантных символов. Это преобразование выражается через оператор Лапласа–Бельтрами Δ следующим образом:

$$\mathcal{B}_\sigma = \left.\frac{\Gamma(-2\sigma+\tau)\,\Gamma(-2\sigma-\tau-1)}{\Gamma(-2\sigma)\,\Gamma(-2\sigma-1)}\right|_{\tau(\tau+1)=\Delta}.$$

Мы будем использовать следующие обозначения для "обобщенных степеней" (здесь a – число, $s = 1, 2, \ldots$):

$$a^{(s)} = a\,(a-1)\ldots(a-s+1), \quad a^{[s]} = a\,(a+1)\ldots(a+s-1),$$

а также $a^{(0)} = a^{[0]} = 1$.

Теорема 1 ([1]) *Справедливо следующее полное асимптотическое разложение преобразования Березина:*

$$\mathcal{B}_\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{W_m}{m!} \cdot \frac{1}{(-2\sigma - 2)^{(m)}},$$

где $W_0 = 1$,

$$W_m = \Delta\ (\Delta - 1 \cdot 2)\ (\Delta - 2 \cdot 3) \cdots (\Delta - (m-1)m)\ , \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда и из (4) следует, что на пространстве $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ оператор W_m есть умножение на число:

$$W_m f = (k+m)^{(2m)} f, \quad f \in \mathcal{H}_k(\mathcal{X})\,. \tag{5}$$

Теорема 2 *Оператор W_m можно представить в одном из следующих двух видов. Во-первых, как произведение $2m$ линейных дифференциальных операторов:*

$$\begin{aligned} W_m = \left(N\frac{\partial}{\partial\eta} + m\xi\right)\left(N\frac{\partial}{\partial\eta} + (m-1)\xi\right)\ldots\left(N\frac{\partial}{\partial\eta} + \xi\right) \times \\ \times N\frac{\partial}{\partial\xi}\left(N\frac{\partial}{\partial\xi} - \eta\right)\ldots\left(N\frac{\partial}{\partial\xi} - (m-1)\eta\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Во-вторых, как обобщение формулы (3) (она получается при $m = 1$):

$$W_m = N^{m+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right)^m N^{m-1}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}, \quad D = \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\,.$$

Сначала покажем эквивалентность выражений (6) и (7). Произведение первых $m+1$ множителей в (6) сворачивается в оператор

$$N^{m+1} A \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{m-1}. \tag{8}$$

В самом деле, вычисляем это прозведение, идя справа налево:

$$\left(N\frac{\partial}{\partial\eta} + \xi\right) N = N(-\xi) + N^2\frac{\partial}{\partial\eta} + \xi N = N^2\frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$\left(N\frac{\partial}{\partial\eta} + 2\xi\right) N^2 = 2N^2(-\xi) + N^3\frac{\partial}{\partial\eta} + 2\xi N^2 = N^3\frac{\partial}{\partial\eta},$$

и т. д. Мы получим это прозведение в виде:

$$N^{m+1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m,$$

что и есть (8). Теперь применим последовательно $m-1$ раз дифференцирование по η из (8) к последним $m-1$ множителям в (6), при этом используем коммутационное соотношение

$$AN^v - N^vA = -vN^{v-1}D + v(v-1)N^{v-2} - v^2N^{v-1}, \quad v\in\mathbb{N}.$$

А именно,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(N\frac{\partial}{\partial\xi}-\eta\right) = NA - D - 1 = AN,$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta}N\left(N\frac{\partial}{\partial\xi}-2\eta\right) = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(N^2\frac{\partial}{\partial\xi}-2\eta N\right) = N^2A - 2ND + 2 - 4N = AN^2$$

и т. д. В конце концов мы получим выражение (7). Итак, операторы (6) и (7) совпадают.

Теперь покажем перестановочность оператора W_m, см. (7) или (6), с представлением U группы G. Для этого достаточно проверить перестановочность его с операторами Ли $U(L_-)$, $U(L_1)$, $U(L_+)$.

Возьмем первый из них, для краткости пишем L вместо $U(L_-)$. Нам надо показать, что

$$L\,W_m = W_m\,L, \quad \text{где} \quad W_m = N^{m+1}\,A^mN^{m-1}. \tag{9}$$

Сначала вычисляем:

$$L\,N^{m+1} = N^{m+1}\{L-(m+1)\eta\}.$$

Далее, используя соотношение (здесь a – число)

$$\{L-a\eta\}A = A\{L-(a-2)\eta\} + (a-2)\frac{\partial}{\partial\xi},$$

находим

$$\{L-a\eta\}A^u = A^u\{L-(a-2u)\eta\} + u(a-u-1)A^{u-1}\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

Положим здесь $a=m+1$, $u=m$, получим

$$\{L-(m+1)\eta\}\,A^m = A^m\,\{L+(m-1)\eta\}.$$

Наконец, вычисляем

$$\{L+(m+1)\eta\}\,N^{m-1} = N^{m-1}L\,,$$

что и доказывает (9).

Аналогично доказывается перестановочность W_m с оператором $U(L_+)$, а оператор $U(L_1)$ коммутирует с каждым множителем в (7). Таким образом, для оператора W_m, см. (7) или (6), каждое пространство $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$ является собственным.

Вычислим это собственное число оператора W_m на пространстве $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$.

Удобно взять минимальный многочлен $f_k = (\eta/N)^k$ из $\mathcal{H}_k(\mathcal{X})$. Применим к нему оператор (7). Сначала имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m \eta^k\,N^{-k+m-1} = k^{[m]}\,\eta^{k+m}\,N^{-k-1}\,. \tag{10}$$

Затем применяем оператор $(\partial/\partial\eta)^m$. Здесь мы используем формулу

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^v \eta^a\,N^{-b} = \eta^{a-v}\sum_{j=0}^{v}\binom{v}{j}\,b^{[v-j]}\,(a-b-v+1)^{[j]}\,N^{-b-v+j}\,,$$

ее можно доказать, например, индукцией по v. Положим $a = k+m$, $b = k+1$ и $v = m$, тогда от суммы остается только одно слагаемое – с номером $j = 0$. Получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^m \eta^{k+m}N^{-k-1} = (k+1)^{[m]}\eta^k N^{-k-1-m}\,,$$

Объединяя это с (10) и умножая на N^{m+1}, получаем, что (7) умножает f_k на $(k+m)^{(2m)}$. Вместе с (5) это заканчивает доказательство теоремы 2.

Литература

1. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite-dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и технические науки, 1998, том 3, вып. 1, 65–78.

Поступила в редакцию 16 ноября 2013 года

V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Asymptotic expansion of Berezin transform for a hyperboloid of one sheet

We present new formulae for coefficients of the full asymptotic expansion of Berezin transform for a hyperboloid of one sheet in $\mathbb{R}^3$.

Keywords: para-Hermitian symmetric spaces; hyperboloids; polynomial quantization; symbol calculi.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Волотова Надежда Борисовна, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, город Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа.

Molchanov Vladimir Fedorovich, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of physics and mathematics, Professor, Head of mathematical analysis chair, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Volotova Nadezhda Borisovna, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of physics and mathematics, Associate Professor of the mathematical analysis chair.