УДК 517.98

О тензорных произведениях представлений трехмерной группы Лоренца [1]

© В. Ф. Молчанов, Е. В. Сарычева

Ключевые слова: группы и алгебры Ли; представления групп Ли; тензорные произведения; сплетающие операторы.

Написаны в компактной реализации сплетающие операторы, дающие разложение на неприводимые составляющие тензорного произведения неприводимых конечномерных представлений группы $\mathrm{SO}_0(1,2)$. Эти операторы оказываются дифференциальными операторами.

В настоящей работе мы пишем в *компактной реализации* преобразования Пуассона (сплетающие операторы) для тензорного произведения $T_l \otimes T_m$ неприводимых конечномерных представлений группы $\mathrm{SO}_0(1,2)$ со старшими весами l и m. Эти формулы справедливы также и для случая, когда одно из представлений бесконечномерно. В [2] такие формулы были написаны для $m = 1$. Для некомпактной реализации преобразования Пуассона для тензорного произведения $T_l \otimes T_m$ представлений группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (с произвольными l, m) были написаны в нашей работе [1], см. также [3].

Напомним некоторый материал из [1]. Группа $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц второго порядка с определителем единица:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Всякое конечномерное неприводимое представление T_l группы G задается числом l (*старшим весом*), таким, что $2l \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Оно действует в пространстве V_l многочленов $f(x)$ от x степени $\leqslant 2l$ (так что $\dim V_l = 2l + 1$) по формуле

$$(T_l(g)\, f)\,(x) = f(\widetilde{x})\,(\beta x + \delta)^{2l}, \quad \widetilde{x} = x \cdot g = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\,,$$

мы считаем, что G действует справа.

Тензорное произведение $W_{lm} = V_l \otimes V_m$ состоит из многочленов $f(x,y)$ степени $\leqslant 2l$ по x и степени $\leqslant 2m$ по y. Представление $T_l \otimes T_m$ группы G действует в W_{lm} по формуле

$$(T_{lm}(g) f)\,(x,y) = f(\widetilde{x}, \widetilde{y})\,(\beta x + \delta)^{2l}\,(\beta y + \delta)^{2m}.$$

[1] Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00952 и Госзаданием Минобрнауки 1.3445.2011.

Обозначим

$$r = m - l.$$

Мы будем использовать следующее обозначение для "обобщенных степеней" (мы предпочитаем его символу Похгаммера):

$$a^{[s]} = a\,(a+1)\ldots(a+s-1),$$

здесь a – число или оператор, $s \in \mathbb{N}$.

Пространство $W_{lm} = V_l \otimes V_m$ разлагается в сумму подпространств:

$$V_l \otimes V_m = W_{|r|}^{(l,m)} + W_{|r|+1}^{(l,m)} + \ldots + W_{l+m-1}^{(l,m)} + W_{l+m}^{(l,m)}.$$

инвариантных и неприводимых относительно $T_l \otimes T_m$. Ограничение представления $T_l \otimes T_m$ на $W_k^{(l,m)}$ эквивалентно T_k, так что

$$T_l \otimes T_m = T_{|r|} + T_{|r|+1} + \ldots + T_{l+m-1} + T_{l+m}.$$

Теорема 1 ([1]) *Сплетающие операторы* $M_k^{(l,m)} : V_k \to W_k^{(l,m)}$ *даются следующей формулой:*

$$\begin{aligned}\left(M_k^{(l,m)} f\right)(x,y) \;&=\; \sum_{s=0}^{k+r} \binom{k+r}{s} (k-r+1)^{[s]} \;\times \\ &\times\; (y-x)^{2m-s} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k+r-s} f(x).\end{aligned}$$

Этот оператор можно записать в виде произведения $k+r$ *линейных* дифференциальных операторов, а именно,

$$\left(M_k^{(l,m)} f\right)(x,y) = (y-x)^{l+m-k} \left\{(y-x)\frac{d}{dx} + k - r + 1\right\}^{[k+r]} f(x),$$

подробно:

$$\begin{aligned}\left(M_k^{(l,m)} f\right)(x,y) &= (y-x)^{l+m-k} \left\{(y-x)\frac{d}{dx} + k - r + 1\right\} \times \\ &\times \left\{(y-x)\frac{d}{dx} + k - r + 2\right\} \ldots \left\{(y-x)\frac{d}{dx} + 2k\right\} f(x). \qquad (1)\end{aligned}$$

Перейдем теперь к *компактной реализации* представлений T_l. Здесь мы должны считать, что $l \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{C}$ – конус в $\mathbb{R}^3$, задаваемый условиями $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_1 > 0$. Реализуем $\mathbb{R}^3$ как множество матриц

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 + x_1 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Группа G действует сопряжениями: $x \mapsto g^{-1}xg$. Это дает гомоморфизм $g \mapsto \widetilde{g}$ группы G на трехмерную группу Лоренца $\widetilde{G} = \mathrm{SO}_0(1,2)$. На конусе действие транзитивно.

Для $\sigma \in \mathbb{C}$ пусть $\mathcal{D}_\sigma$ обозначает пространство функций $\psi(x)$ на конусе $\mathcal{C}$ класса C^∞ однородных степени σ, то есть $\psi(ux) = u^\sigma \psi(x)$, $u > 0$. Рассмотрим на конусе два сечения $\mathcal{Y}$ и S плоскостями $x_1 - x_2 = 1$ и $x_1 = 1$, соответственно. Точки $y \in \mathcal{Y}$ и $s \in S$ имеют вид:

$$y = \left(\frac{t^2+1}{2}, \frac{t^2-1}{2}, t \right), \quad s = (1, \cos\alpha, \sin\alpha).$$

Отображение вдоль образующих переводит y в s так, что $t = \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

Пространство V_l многочленов $f(t)$ от t степени $\leqslant 2l$ получается при ограничении на $\mathcal{Y}$ функций из некоторого подпространства в $\mathcal{D}_l$. Ограничения на S этих функций дают пространство, обозначим его снова V_l, состоящее из линейных комбинаций экспонент $e^{ip\alpha}$, где p – целое число, $|p| \leqslant l$. Мы будем также писать $\varphi(\alpha)$ вместо $\varphi(s)$. Многочлену $f(t)$ из V_l отвечает функция

$$\varphi(\alpha) = f(t) \cdot (1 - \cos\alpha)^l, \quad t = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

В этих функциях представление T_l действует по формуле

$$(T_l(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{s\widetilde{g}}{(s\widetilde{g})_1}\right)(s\widetilde{g})_1^l,$$

индекс 1 указывает первую координату. Тензорное произведение $T_l \otimes T_m$ действует в пространстве $V_l \otimes V_m$ функций $\varphi(\alpha, \beta)$.

Перепишем (1) в реализации на S. Мы используем

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(x, y) \cdot (1 - \cos\alpha)^l \cdot (1 - \cos\beta)^m.$$

где

$$x = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Обозначим

$$v = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Мы получаем следующую теорему.

Теорема 2 *Сплетающие операторы* $M_k^{(l,m)}$, $k \in \{|r|, |r|+1, \ldots, l+m\}$, *в реализации на* S *даются следующей формулой:*

$$\left(M_k^{(l,m)}\varphi\right)(\alpha,\beta) = (2\sin v)^{l+m-k}\left\{2\sin v\,\frac{d}{d\alpha} - (k-r+1)\cos v\right\} \times$$
$$\times\left\{2\sin v\,\frac{d}{d\alpha} - (k-r+2)\cos v\right\}\ldots\times$$
$$\times\left\{2\sin v\,\frac{d}{d\alpha} - (2k)\cos v\right\}\varphi(\alpha). \qquad (2)$$

Заметим, что, в отличие от (1), дифференциальные операторы в (2) *не коммутируют.*

Формула (2) справедлива также и для случая, когда одно из представлений, скажем, T_l, бесконечномерно, тогда l может быть любым комплексным числом: $l = \sigma \in \mathbb{C}$, а индекс k принимает тогда значения из множества

$$\{\sigma - m, \sigma - m + 1, \ldots, \sigma + m - 1, \sigma + m\},$$

см. также [2] для $m = 1$.

Литература

1. В. Ф. Молчанов. Преобразования Пуассона для тензорных произведений представлений группы матриц второго порядка. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2013, том 18, вып. 5, 2613–2616.

2. В. Ф. Молчанов, Е. В. Сарычева. Тензорные произведения представлений трехмерной группы Лоренца и тавтологического представления. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2012, том 17, вып. 1, 99–104.

3. В. Ф. Молчанов, Е. В. Сарычева. О тензорных произведениях представлений группы матриц второго порядка. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2013, том 18, вып. 1, 120–124.

Поступила в редакцию 16 ноября 2013 года

V. F. Molchanov, E. V. Sarycheva. On tensor products of representations of three-dimensional Lorentz group

We write in the compact realization intertwining operators that decompose tensor products of irreducible finite-dimensional representations of the group $SO_0(1, 2)$ into irreducible constituents. These operators turn out to be differential operators.

Keywords: Lie groups and Lie algebras; representations of Lie groups; tensor products; intertwinning operators.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Сарычева Елена Витальевна, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант кафедры математического анализа, e-mail: evseeva.elena.1989@gmail.com

Molchanov Vladimir Fedorovich, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of physics and mathematics, Professor, Head of mathematical analysis chair, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Sarycheva Elena Vitalievna, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, post-graduate student of the mathematical analysis chair, e-mail: evseeva.elena.1989@gmail.com