УДК 519.85+574

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АУТОСТАБИЛИЗАЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

© А.В. Кулаева, А.А. Арзамасцев

Ключевые слова: неявная разностная схема; метод прогонки; метод дробных шагов; математическая модель; аутостабилизация температуры; компьютерное моделирование.

Неявная разностная схема для трехмерного случая представляется как сумма трех одномерных неявных разностных схем. Используется метод дробных шагов.

Разностная схема – это конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной задаче, содержащей дифференциальное уравнение и дополнительные условия (например, краевые условия и/или начальное распределение). Таким образом, разностные схемы применяются для сведения дифференциальной задачи, имеющей непрерывный характер, к конечной системе уравнений, численное решение которых принципиально возможно на вычислительных машинах. Алгебраические уравнения, поставленные в соответствие дифференциальному уравнению, получаются применением разностного метода, что отличает теорию разностных схем от других численных методов решения дифференциальных задач [1].

В явных схемах вычисляют значение переменной по нескольким соседним известным точкам. Такие схемы часто оказываются неустойчивыми. Неявные схемы используют уравнения, которые выражают данные через несколько соседних точек результата. Для нахождения результата решается система линейных уравнений. Неявные схемы обычно являются устойчивыми [2].

К математической модели, разработанной ранее [3], были применены уравнения аппроксимации, полученные в соответствии с выбранным шаблоном [4].

Получена система неявных разностных схем для уравнений динамики температуры, субстрата и кислорода, соответственно:

$$\begin{aligned}
&T_{i,j,m,n} = \\
&= k(T_{i,j,m,n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{2\lambda}{c\rho}\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}\right)-\frac{w_x}{h_1}-\frac{w_y}{h_2}-\frac{w_z}{h_3}\right)+ \\
&+T_{i+1,j,m,n+1}\left(\frac{w_x}{h_1}-\frac{\lambda}{c\rho h_1^2}\right)+T_{i,j+1,m,n+1}\left(\frac{w_y}{h_2}-\frac{\lambda}{c\rho h_2^2}\right)+ \\
&+T_{i,j,m+1,n+1}\left(\frac{w_z}{h_3}-\frac{\lambda}{c\rho h_3^2}\right)-\frac{\lambda}{c\rho h_1^2}T_{i-1,j,m,n+1}- \\
&-\frac{\lambda}{c\rho h_2^2}T_{i,j-1,m,n+1}-\frac{\lambda}{c\rho h_3^2}T_{i,j,m-1,n+1}+Q_T) \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&S_{i,j,m,n} = \\
&= k(S_{i,j,m,n+1}\left(\frac{1}{k}+2D_S\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}\right)-\frac{w_x}{h_1}-\frac{w_y}{h_2}-\frac{w_z}{h_3}\right)+ \\
&+S_{i+1,j,m,n+1}\left(\frac{w_x}{h_1}-\frac{D_s}{h_1^2}\right)+S_{i,j+1,m,n+1}\left(\frac{w_y}{h_2}-\frac{D_S}{h_2^2}\right)+ \\
&+S_{i,j,m+1,n+1}\left(\frac{w_z}{h_3}-\frac{D_S}{h_3^2}\right)-\frac{D_S}{h_1^2}S_{i-1,j,m,n+1}- \\
&-\frac{D_S}{h_2^2}S_{i,j-1,m,n+1}-\frac{D_S}{h_3^2}S_{i,j,m-1,n+1}+Q_S) \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C_{i,j,m,n} = \\
&= k(C_{i,j,m,n+1}\left(\frac{1}{k}+2D_C\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}\right)-\frac{w_x}{h_1}-\frac{w_y}{h_2}-\frac{w_z}{h_3}\right)+ \\
&+C_{i+1,j,m,n+1}\left(\frac{w_x}{h_1}-\frac{D_C}{h_1^2}\right)+C_{i,j+1,m,n+1}\left(\frac{w_y}{h_2}-\frac{D_C}{h_2^2}\right)+ \\
&+C_{i,j,m+1,n+1}\left(\frac{w_z}{h_3}-\frac{D_C}{h_3^2}\right)-\frac{D_C}{h_1^2}C_{i-1,j,m,n+1}- \\
&-\frac{D_C}{h_2^2}C_{i,j-1,m,n+1}-\frac{D_C}{h_3^2}C_{i,j,m-1,n+1}+Q_C \qquad (3)
\end{aligned}$$

Индексы i, j, m изменяются в диапазоне от 1 до N_x, N_y, N_z, соответственно, где N_x, N_y, N_z – количество разбиений по координате. Система алгебраических уравнений образуется путем прохода по выбранной координате, в результате чего мы получаем N_x уравнений в случае с i, $N_y - j$, $N_z - k$.

Для решения уравнений (1)–(3) необходимо решить систему линейных уравнений.

Дифференциальные уравнения, входящие в состав имеющейся системы, являются параболическими и описывают объект, находящийся в трехмерном пространстве и наблюдаемый в динамике. Так же система была составлена с использованием неявной разностной схемы.

Исходя из вышеперечисленных фактов оптимальным методом решения является комбинирование метода дробных шагов и метода прогонки.

В случае задач с трехмерными объектами, интервал между точками n и n+1 на разностной сетке расщепляется на три равных отрезка. Полученные промежуточные точки обозначим как n+1/3, n+2/3.

На первой трети интервала записывается первая подсхема, учитывающая производные по x:

$$T_{i,j,m,n} = k\left[\left(\frac{1}{k}+\frac{2\lambda}{c\rho h_1^2}+\frac{w_x}{h_1}\right)T_{i,j,m,n+\frac{1}{3}}-\left(\frac{\lambda}{c\rho h_1^2}-\right.\right.$$
−wxh1Ti+1,j,m,n+13−λcρh12Ti−1,j,m,n+13−QT.
(4)

На второй трети интервала записывается вторая подсхема, учитывающая лишь производные по y:

$$T_{i,j,m,n+1/3} = k[\left(\frac{1}{k} + \frac{2\lambda}{c\rho h_2^2} + \frac{w_y}{h_2}\right) T_{i,j,m,n+2/3} - \\ - \left(\frac{\lambda}{c\rho h_2^2} - \frac{w_y}{h}\right) T_{i,j+1,m,n+2/3} - \frac{\lambda}{c\rho h_2^2} T_{i,j-1,m,n+2/3}] \quad (5)$$

На последней трети интервала записывается подсхема, учитывающая оставшиеся производные по z:

$$T_{i,j,m,n+\frac{2}{3}} = k[\left(\frac{1}{k} + \frac{2\lambda}{c\rho h_3^2} + \frac{w_z}{h_3}\right) T_{i,j,m,n+1} - \\ - \left(\frac{\lambda}{c\rho h_3^2} - \frac{w_z}{h_3}\right) T_{i,j,m+1,n+1} - \frac{\lambda}{c\rho h_3^2} T_{i,j,m-1,n+1}]. \quad (6)$$

Таким образом, схема расщепления имеет три подсхемы, в сумме получается выражение, отличающееся от исходного тем, что производные по пространственным координатам аппроксимируются в точках n+1/3, n+2/3 и n+1.

Каждая подсхема представляет собой неявную разностную схему для одномерного дифференциального уравнения параболического типа и решается с помощью метода прогонки.

Общий вид уравнений (4)–(6) при приведении их к одномерному случаю:

$$T_{p,n+\varphi} = a_p T_{p+1,n+\mu} + b_p T_{p,n+\mu} + c_p T_{p-1,n+\mu} + f_p$$

$$\xi_{p,n+\varphi} = T_{p,n+\varphi} + f_p \quad (7)$$

$$a_p T_{p+1,n+\mu} + b_p T_{p,n+\mu} + c_p T_{p-1,n+\mu} = \xi_{p,n+\varphi}$$

где p – i в случае уравнения (4), j – (5), m – (6); n+φ – координата по времени для первого слоя, n+μ – координата по времени для второго слоя, причем μ–φ = 1/3; f_p – свободный член (равен нулю, кроме уравнения (4), где $f_p = Q_T$).

Примененный в задаче разностный шаблон предполагает, что функция содержит три неизвестных значения на новом слое, значит, для реализации разностной схемы необходимо связать значения функции на n+μ слое.

$$T_{p,n+\mu} = \alpha_p T_{p+1,n+\mu} + \beta_p,$$

α_p, β_p – прогоночные коэффициенты.

Аналогично: $T_{p-1,n+\mu} = \alpha_{p-1} T_{p,n+\mu} + \beta_{p-1}$.

В итоге, после преобразования всех трех подсхем, получаем три системы линейных уравнений, N_x уравнений с N_x неизвестными в случае первой подсхемы и N_y, N_z – для второй и третьей подсхем, которые можно решить методом Гаусса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колешко С.Б., Попов Ф.Д.* Механика жидкости и газа. Разностные схемы. СПб.: СПбГТУ, 2001.
2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. *Арзамасцев А.А., Альбицкая Е.Н.* Математическое моделирование саморегулирования температуры в популяциях микроорганизмов: непрерывный процесс // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып. 6. С. 709-714.
4. *Кулаева А.В., Арзамасцев А.А.* Неявная разностная схема для математической модели аутостабилизации температуры биологических объектов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2947-2949.

Поступила в редакцию 20 ноября 2013 г.

Kulaeva A.V., Arzamastsev A.A. SOLUTION METHODS OF IMPLICIT DIFFERENCE SCHEME FOR MATHEMATICAL MODEL OF TEMPERATURE AUTOSTABILIZATION OF BIOLOGICAL OBJECTS

The implicit difference scheme for three-dimensional case is presented as a sum of three one-dimensional implicit difference schemes. The method of fractional steps is used.

Key words: implicit difference scheme; sweep method; method of fractional steps; mathematical model; temperature autostabilization; computer simulation.

Кулаева Александра Владимировна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» института математики, физики и информатики, e-mail: arz_sci@mail.

Kulaeva Aleksandra Vladimirovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate for Master's Degree of Direction of Preparation of "Applied Mathematics and Informatics" of Mathematics, Physics and Informatics Institute, e-mail: arz_sci@mail.ru

Арзамасцев Александр Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой компьютерного и математического моделирования, e-mail: arz_sci@mail.ru

Arzamastsev Alexander Anatolyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Head of Computer and Mathematical Simulation Department, e-mail: arz_sci@mail.ru