ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т.19, вып.2, 2014

УДК 621.39

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СВЯЗНОСТИ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ МОДЕЛИ НАГРУЖЕННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СЕТИ

© А.С. Назаров, И.И. Пасечников, В.В. Штейнбрехер

Ключевые слова: тензорный анализ информационной сети; связность информационного пространства; тензор преобразования потоков; метрический тензор; символы Кристоффеля; пространство маршрутизации; пространства путей; пространства одноканальных систем.

Проведен анализ информационных потоков в пространстве состояний подразделенной модели информационной сети, показана связь с путевым пространством состояний с использованием тензора преобразований, определены коэффициенты связности пространства состояний сети в виде математических сущностей – символов Кристоффеля.

Тензорный анализ нагруженных информационных сетей (ИС) предусматривает описание и исследование точки состояния ИС [1] в различных пространствах, определяемых режимами функционирования системы [2, 3]. Важной особенностью вопроса перехода к понятию ковариантной производной, характеризующей динамику поведения вектора приращения состояния ИС в окрестности точки с учетом кривизны пространства, является определение понятий символов Кристоффеля первого и второго рода [4] применительно к процессам передачи информации в ИС.

Цель: описание систем потоков передаваемых пакетов в сетях, их преобразование и отображение в различных системах координат и определение связности путевых пространств модели ИС на основе представления символов Кристоффеля.

Графически тензорную ортогональную подразделенную модель ИС [1] для сегмента из трех связных узлов можно представить в виде трех взаимодействующих систем, каждая из которых имеет определенную совокупность типовых одноканальных систем (ОС) замкнутого и разомкнутого вида (рис. 1).

Потоки λ^i, проходящие в замкнутых i-х цепях (ОС замкнутого типа), и γ^j, соответствующие разомкнутым j-м цепям (ОС разомкнутого типа), в сетевой структуре с узлами коммутации А, В и С (УКА, УКБ, УКС) определяют метрические особенности данного сетевого сегмента. С использованием тензорной ортогональной формулы поведения [1], а также свойств скалярного произведения величин можно определить состояние ОС, составляющих определенную сетевую систему элементарных m компонент (для рассматриваемого варианта m = 12, а именно, шесть ОС разомкнутого типа и шесть ОС замкнутого типа). Пространство состояний стационарной, нагруженной ИС может быть представлено евклидовым E_m, в котором косинусы углов между ортами системы координат, соответствующим m ОС, характеризуют метрику этого пространства. Нахождение компонент метрического тензора для такой модели предусматривает вычисление частных производных, характеризующих скорость изменения состояний ОС на единицу приращения количества информации потоков, проходящих через них (λ^i и γ^j), и их скалярное произведение, полученное для взаимодействующих ОС. В результате, можно представить пространство состояний ИС в «координатах» состояний ОС.

Рассмотрим состояние ИС относительно «координат» состояний путей [1]. Геометрически модель такой сети можно представить также евклидовым E_m пространством. Однако необходимо заметить, что в невырожденном E_m пространстве состояний ОС могут иметь место вырожденные подпространства меньшей размерности. Они соответствуют подмножествам ОС, в которых, как минимум, одна одноканальная система из них не имеет какой-либо информационной связи со всеми остальными.

Для представления потоков многоскачковой ИС в путевом пространстве состояний введем в пространство состояний ОС E_m новую систему координат, в которой каждая ее ось соответствует новой переменной – количество информации в путевом потоке. В качестве таковых рассматриваются как внешние потоки γ^j, так и транзитные λ^i, т. е. совокупность которых составляет, например, приведенные на рис. 1 потоки q^1 и q^2. Последнее физически обусловлено тем, что в нагруженной ИС ее состояние зависит не только от функции распределения информации (маршрутизации), но и от функции управления доступом к сети, а следовательно, от внешней нагрузки. Выберем в качестве новых координатных осей совокупность криволинейных осей, k из которых соответствуют линейно независимым внешним (входным и выходным) потокам, а n – линейно независимым путевым потокам, причем $k + n = m$, где m – число кибернетических элементов (ОС замкнутого и разомкнутого типов) в модели ИС. Приведенное равенство оставляет неизменной полную размерность пространства состояний сети и соответствует при этом тензорной ортогональной модели.

Для понятия криволинейного пространства ИС произведем арифметизацию, например, n-мерного подпространства, характеризующего количество информации, передаваемой по n-линейно независимым путям. Будем представлять его в виде множества всевозможных

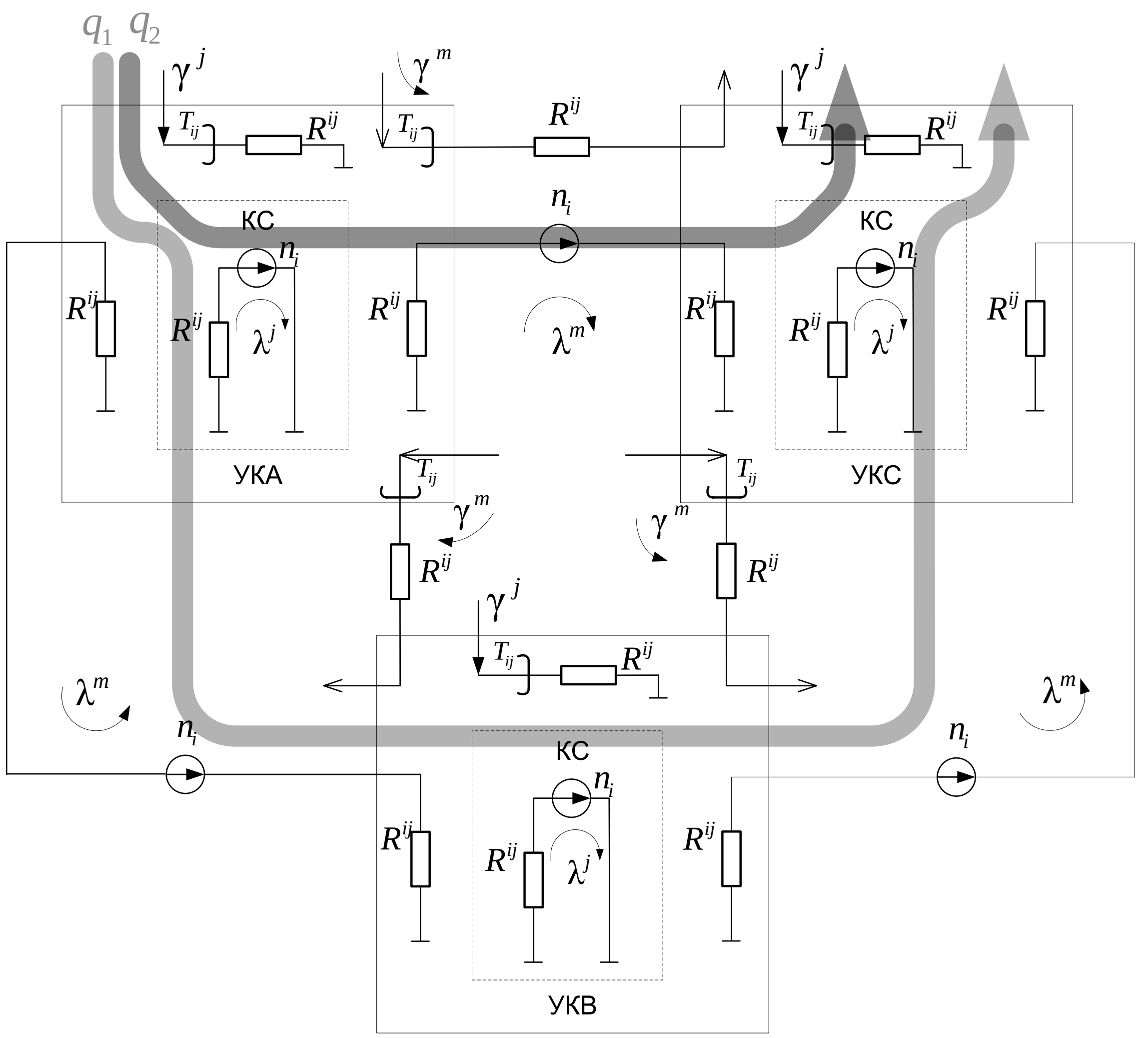

Рис. 1. Информационные потоки в сегменте тензорной ортогональной подразделенной модели ИС

последовательностей вида ($q^1, \ldots, q^n$), где каждая отдельная последовательность ($q^1, \ldots, q^n$) есть точка криволинейного пространства, а числа $q^1, \ldots, q^n$ – координаты точек, значения которых количественно определяют загрузку (на интервале рассмотрения), соответственно, 1, …, *n* путей пакетами. Заметим, каждая точка q^i, $i = 1, \ldots, n$ как бы погружена в охватывающую ее область, которая характеризуется условием дифференцируемости в окрестности точки (это условие необходимо при проведении тензорного анализа ИС). Как отмечено ранее, одновременно с *n* транзитными путевыми потоками существуют внешние потоки, которые изменяют значения состояний ОС, а суммарное число потоков не превышает числа элементарных сетевых элементов и в предельном случае равно: $\mathrm{card}\ \{n+1, \ldots, m\} = k$. Исходя из этого, положение точки M_0 на кривой состояния ИС формально является функцией от информационной загрузки путей $q^1, \ldots, q^n, q^{n+1}, \ldots, q^m$, т. е. $\mathbf{r}(q^1, \ldots, q^n, q^{n+1}, \ldots, q^m)$. Другими словами, координаты M_0 могут быть определены в *m*-мерном аффинном пространстве посредством криволинейных координат $q^1, \ldots, q^n, q^{n+1}, \ldots, q^m$, соответствующих вложенным в него *n*-мерному подпространству путевых потоков и *k*-мерному подпространству внешних потоков:

$$\begin{cases} x^1(\mathbf{r}) = x^1(q^1, \ldots, q^n, q^{n+1}, \ldots, q^m); \\ \vdots \\ x^m(\mathbf{r}) = x^m(q^1, \ldots, q^n, q^{n+1}, \ldots, q^m). \end{cases} \tag{1}$$

Например, состояние условно первой ОС может быть определено как сумма количества информации путевых потоков, использующих эту систему на интервале рассмотрения: $x^1 = k_1^1 q^1 + k_2^1 q^2 + \ldots + k_n^1 q^n$, где коэффициенты при потоках представлены компонентами смешанного тензора ввиду того, что они, по существу, связывают пространство путей и подпространство ОС.

Обратно, $n+k$ координаты криволинейного пространства $q^1, \ldots, q^n, q^{n+1}, \ldots, q^m$ – суть значения количества пакетов в путевых и выходных потоках, характеризуются совокупностью состояний ОС:

– для *n* путевых (транзитных) потоков

$$\begin{cases} q^1(\mathbf{r}) = q^1(x^1, \ldots, x^m); \\ \qquad \vdots \\ q^n(\mathbf{r}) = q^n(x^1, \ldots, x^m); \end{cases} \tag{2}$$

– для *k* внешних потоков

$$\begin{cases} q^{n+1}(\mathbf{r}) = q^{n+1}(x^1, \ldots, x^m); \\ \qquad \vdots \\ q^m(\mathbf{r}) = q^m(x^1, \ldots, x^m). \end{cases} \tag{3}$$

Это означает, что существует функциональный переход от пространства, выраженного координатами ОС, к пространству путевых и внешних потоков и обратно, что позволяет говорить о существовании однозначного взаимно обратного функционального преобразования. Так как $\mathbf{r}$ является вектор-функцией путевых переменных: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, \ldots, q^n, q^{n+1}, \ldots, q^m)$, то изменение $\mathbf{r}$ относительно аргументов q^i будет характеризоваться частными производными:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \cdots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^n}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^{n+1}}, \cdots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^m}\right) \neq 0\,. \tag{4}$$

Функциональная зависимость (4) позволяет изменение количества информации в пространстве состояний ОС отобразить отличным от нуля в каждой точке якобианом преобразования:

$$\det H^{\alpha}_{\cdot\beta} = \det\left|\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right| = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial q^1} \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial q^n} & \frac{\partial x^1}{\partial q^{n+1}} \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial q^m} \\ \frac{\partial x^2}{\partial q^1} \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial q^n} & \frac{\partial x^2}{\partial q^{n+1}} \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial q^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial q^1} \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial q^n} & \frac{\partial x^m}{\partial q^{n+1}} \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial q^m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

В смешанном тензоре преобразования $H^{\alpha}_{\cdot\beta}$ контравариантные скользящие индексы α (строки) характеризуют оси системы координат ОС, а β (столбцы) – оси системы координат путей.

Условие (5) означает невырожденность матрицы преобразования. Отсутствие хотя бы одного нулевого столбца или строки обосновывается тем, что изменение состояния каждого ОС (канала связи или накопительного устройства) вызвано, как минимум, приращением информации в одном путевом потоке. В противном случае сеть несвязна (такая топологическая ситуация на сети не рассматривается).

Неравенство (5) означает существование матрицы обратного преобразования $F^{\beta}_{\cdot\alpha}$. При этом имеет место неравенство:

$$\det F^{\beta}_{\cdot\alpha} = \det\left|\frac{\partial q^i}{\partial x^j}\right| = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial q^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial q^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial q^n}{\partial x^m} \\ \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial q^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial q^1}{\partial x^m} \end{vmatrix} \neq 0\,, \tag{6}$$

которое также просто обосновывается: приращение количества информации в любом пути для связной сети не может не зависеть от приращения информации хотя бы в одной ОС.

Так как состояние сети можно описать через состояния ОС в виде *m* скалярных соотношений (1), то при выполнении условия существования локального репера (4) можно с помощью тензора преобразования $H^{\alpha}_{\cdot\beta}$ осуществить связь векторов локального репера в окрестности точки пространства путевых потоков с единичными векторами репера пространства состояний ОС. В этом случае такая зависимость будет иметь вид:

$$\mathbf{r}_{\beta} = H^{\alpha}_{\cdot\beta}\mathbf{e}_{\alpha}\,, \tag{7}$$

где учтено, что вектора $\mathbf{e}_{\alpha}$ характеризуют пространство, описываемое потоками ОС, а именно, значениями λ^i и γ^j, представленными в подразделенной тензорной модели (рис. 1), а вектора $\mathbf{r}_{\beta}$ – путевое пространство состояний ИС. В связи с этим векторы локального репера путевого пространства в точке состояния сети M_0 можно расписать в виде:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial \mathbf{x}^{\nu}}{\partial q^i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{8}$$

где $\mathbf{x}^{\nu} = x^{\nu}\mathbf{e}_{\nu}$ (суммирование по мнимым индексам не производится) – контравариантный вектор, характеризующий передачу количества информации в ν-й ОС, q^i – значение в точке M_0 i-й координатной линии, которое соответствует количеству передаваемой информации в i-м пути на единичном интервале времени.

Динамика состояний сети предусматривает необходимость описания перехода точки состояния сети в ближайшую, соседнюю точку. Переход к ближайшей точке состояния сети M_1 в общем случае должен сопровождаться изменением этой плоскости относительно переменных путевых потоков. Из-за взаимного информационного влияния путей, имеющих общие ОС, имеет место дополнительная энтропия в виде изменения приращения состояний каждой ОС из-за одновременного его использования двумя и более путями.

Учитывая линейную независимость рассматриваемых путей, в качестве дополнительной переменной пространства, которая и влияет на его кривизну, необходимо использовать вторую частную производную $\mathbf{r}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j} = \mathbf{r}_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, n . \tag{9}$$

Как видно из рис. 1, ненулевые значения второй частной производной будут в УКС, причем для одноканальных систем, которые характеризуют входные каналы и процессор обслуживания внутриузловых потоков.

Вместе с тем величины $\mathbf{r}_{ij}$ в любом рассматриваемом локальном пространстве могут быть разложены по компонентам, в частности, определяющим влияние такого одновременного воздействия путей на каждый путь в отдельности через изменение количества передаваемой информации в его составляющих ОС. Это означает разложение векторов $\mathbf{r}_{ij}$ в n-мерном локальном пространстве маршрутизации по векторам локального репера $\mathbf{r}_k$:

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij} \mathbf{r}_k , \tag{10}$$

где Γ^k_{ij} – коэффициенты разложения, называемые в тензорном анализе символами Кристоффеля второго рода.

Важность коэффициентов Γ^k_{ij} можно упрощенно пояснить следующим образом. Криволинейное *n*-мерное пространство путевых потоков представляется в каждой его точке локальным пространством маршрутизации. Из-за пересеченности в узлах коммутации различного количества путевой информации, приращения путевого трафика оптимальное распределение последнего по ОС в соседних точках состояния различно. Эти изменения в геометрической интерпретации соответствуют движению *n*-мерной плоскости T_n в криволинейном пространстве – пространстве путевых потоков, кривизна которого и описывается коэффициентами связности. В связи с этим коррекция задач сетевого уровня в промежутках между соседними состояниями ИС должна непосредственно определяться коэффициентами связности.

Исходя из вариантности векторов разложения, с учетом используемых обозначений в модели ИС [1], символы Кристоффеля первого рода имеют вид:

$$\Gamma_{k,ij} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{x}^\nu}{\partial q^k} \frac{\partial^2 \mathbf{x}^\nu}{\partial q^i \partial q^j} . \tag{11}$$

Выражение (11) показывает, что полученные коэффициенты связности первого рода для модели ИС представляются в виде суммы компонент, каждая из которых вычисляется для отдельно взятой ОС. Они характеризуют взаимное влияние (оцениваемое скалярным произведением) протокола обслуживания рассматриваемой ОС *k*-го потока и решаемой задачи этой же ОС при совместном прохождении через нее потоков *i* и *j*.

Символы Кристоффеля второго рода, применительно к модели ИС, характеризуют метрические соотношения динамики пути относительно состояния ОС и динамики состояния ОС относительно потоков, также совместно использующих ее ресурс:

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial q^k}{\partial \mathbf{x}^\nu} \frac{\partial^2 \mathbf{x}^\nu}{\partial q^i \partial q^j} . \tag{12}$$

Выражения (12) и (12) показывают, что состояние ИС, изменяемое в результате динамики потоков, зависит от реализуемых в сетях протоколов совместного использования ресурса каждой ОС. При этом важна как метрика взаимодействующих процессов [5, 6], так и функция одновременного использования ресурса системы (протокол). Это означает, что для анализа связности пространства состояний ИС необходимо решать частные задачи, например, множественного доступа, маршрутизации с учетом методов расчета сетей [7], детализация которых определяется рассматриваемой тензорной моделью ИС.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пасечников И.И.* Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей: монография. М.: Изд-во «Машиностроение-1», 2004. 216 с.
2. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей / пер. с англ.; под ред. Л.Т. Кузина, П.Г. Кузнецова. М.: Сов. радио, 1978. 719 с.
3. *Петров А.Е.* Тензорная методология в теории систем. М.: Радио и связь, 1985. 151 с.
4. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964. 664 с.
5. *Пасечников И.И., Григоренко С.А.* Построение метрического тензора для ортогональной модели телекоммуникационной сети // Нейробиотелеком-2010: материалы 4 Междунар. науч. конгресса. Инфокоммуникационные технологии в науке, здравоохранении и образовании: сб. науч. трудов. СПб.: «ТЕЛЕДОМ» ГОУВПО СПбГУТ, 2010. С. 37-43.
6. *Пасечников И.И.* Анализ и методы повышения информационной эффективности телекоммуникационных систем и сетей: монография. Тамбов: Издат. дом ТГУ им. Г.Р.Державина, 2010. 118 с.
7. *Пасечников И.И., Назаров А.С.* Отображение процессов передачи пакетов в телекоммуникационной сети в ее ортогональной тензорной модели // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 188-192.

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Nazarov A.S., Pasechnikov I.I., Shteinbreher V.V. DEFINITION OF CONNECTION COEFFICIENTS OF STATE SPACE OF LOADED INFORMATION NETWORK MODEL

The analysis of information flows in the state space of the subdivided information network model is done. The article shows the relationship between flows and state space using transformation tensor and definition of connection coefficients of the network state space in the form of mathematical entities – Christoffel symbols.

Key words: Tensor analysis of information network; connectivity of information space; tensor of transformation of streams; metric tensor; Christoffel's symbols; space of routing; space of ways; spaces of single-channel systems.

Назаров Александр Сергеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра общей физики, e-mail: feodorov@tsu.tmb.ru

Nazarov Aleksander Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Post-graduate Student, General Physics Department, e-mail: feodorov@tsu.tmb.ru

Пасечников Иван Иванович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общей физики, e-mail: feodorov@tsu.tmb.ru

Pasechnikov Ivan Ivanovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Professor of General Physics Department, e-mail: feodorov@tsu.tmb.ru

Штейнбрехер Валерий Васильевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры общей физики, e-mail: feodorov@tsu.tmb.ru

Shteinbreher Valeriy Vasilyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor, Associate Professor of General Physics Department, e-mail: feodorov@tsu.tmb.ru