УДК 512

О НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ ДОМИНИРУЮЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ НЕРАЗЛОЖИМОЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

© В.И. Фомин

Ключевые слова: неразложимая неотрицательная матрица; доминирующее собственное значение; нижняя граница; положительный собственный вектор; спектральный радиус.

Предложена некоторая оценка снизу для доминирующего собственного значения неразложимой неотрицательной матрицы.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, аппарат неотрицательных матриц находит широкое применение в различных областях знания, например, при изучении случайных процессов, описываемых цепями Маркова, используются матрицы переходных вероятностей [1]; при построении межотраслевой модели Леонтьева в математической экономике рассматриваются матрицы расходных коэффициентов [2]; при принятии решений в теории игр используются платежные матрицы с неотрицательными элементами [3]; при исследовании малых колебаний упругих систем применяются осцилляционные матрицы [4]. В связи с этим актуальна задача получения оценок спектрального радиуса таких матриц. Верхние оценки можно получать с помощью известного неравенства $\rho(A) \le \|A\|$ [5] за счет удачного выбора матричной нормы. При получении нижних оценок для $\rho(A)$ можно использовать теорему Фробениуса–Перрона [4]: неразложимая неотрицательная матрица имеет положительное собственное значение λ, которое мажорирует модуль любого другого собственного значения этой матрицы, т. е. $\lambda = \rho(A)$ (по этой причине λ называется доминирующим собственным значением).

В данной работе предлагается одна оценка снизу для доминирующего собственного значения неразложимой неотрицательной матрицы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Теорема 1. Пусть $A = (a_{ij})$ – неразложимая неотрицательная матрица размера $n \times n$, λ – доминирующее собственное значение матрицы A. Тогда верна оценка

$$\lambda \ge \max_{1 \le p \le n^2} \left(\max_{1 \le r_1, \dots, r_p \le n} \prod_{m=1}^{p} a_{r_{m+1} r_m} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

где $r_{p+1} = r_1$ для любого $1 \le p \le n^2$; $p, r_1, \dots, r_p$ – произвольные целые числа, изменяющиеся в указанных пределах.

Доказательство. Пусть p – некоторое фиксированное целое число, $1 \le p \le n^2$; $r_1, \dots, r_p$ – некоторые фиксированные числа, $1 \le r_1, \dots, r_p \le n$.

Покажем, что

$$\lambda^p \ge \prod_{m=1}^{p} a_{r_{m+1} r_m} . \tag{2}$$

Возможны два случая.

1) $r_1, \dots, r_p$ таковы, что найдется хотя бы одно такое $m_0 = t$, $1 \le m_0 \le p$, что

$$a_{r_{t+1} r_t} = 0 .$$

Тогда

$$\prod_{m=1}^{p} a_{r_{m+1} r_m} = a_{r_{t+1} r_t} \prod_{\substack{m=1 \\ m \ne t}}^{p} a_{r_{m+1} r_m} = 0 .$$

Следовательно, в силу положительности λ,

$$\lambda^p > \prod_{m=1}^{p} a_{r_{m+1} r_m} .$$

2) $r_1, \dots, r_p$ таковы, что

$$a_{r_{m+1} r_m} \ne 0$$

для любого $1 \le m \le p$ (напомним, что $r_{p+1} = r_1$).

По определению собственного значения, выполняются равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i , \quad 1 \le i \le n , \tag{3}$$

где $x = (x_j)$ – положительный собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda : x_j > 0$, $1 \le j \le n$.

Запишем (3) для $i = r_2$ в виде

$$a_{r_2 r_1} x_{r_1} + \varepsilon_1 = a_{r_2 r_1} \frac{\lambda}{a_{r_2 r_1}} x_{r_2}, \qquad (4)$$

где

$$\varepsilon_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne r_1}}^{n} a_{r_2 j} x_j \ge 0.$$

Из (4) следует оценка

$$x_{r_1} \le \frac{\lambda}{a_{r_2 r_1}} x_{r_2}. \qquad (5)$$

Запишем (3) для $i = r_3$ в виде

$$a_{r_3 r_2} x_{r_2} + \varepsilon_2 = a_{r_3 r_2} \frac{\lambda}{a_{r_3 r_2}} x_{r_3}, \qquad (6)$$

где

$$\varepsilon_2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne r_2}}^{n} a_{r_3 j} x_j \ge 0.$$

Из (6) следует оценка

$$x_{r_2} \le \frac{\lambda}{a_{r_3 r_2}} x_{r_3}. \qquad (7)$$

Тогда из (5) и (7) следует, что

$$x_{r_1} \le \frac{\lambda}{a_{r_2 r_1}} \frac{\lambda}{a_{r_3 r_2}} x_{r_3}.$$

Продолжая этот процесс, получим на предпоследнем шаге оценку

$$x_{r_1} \le \frac{\lambda}{a_{r_2 r_1}} \frac{\lambda}{a_{r_3 r_2}} \cdots \frac{\lambda}{a_{r_p r_{p-1}}} x_{r_p}. \qquad (8)$$

Запишем теперь (3) для $i = r_1$ в виде

$$a_{r_1 r_p} x_{r_p} + \varepsilon_p = a_{r_1 r_p} \frac{\lambda}{a_{r_1 r_p}} x_{r_1}, \qquad (9)$$

где

$$\varepsilon_p = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne r_p}}^{n} a_{r_1 j} x_j \ge 0.$$

Из (9) следует, что

$$x_{r_p} \le \frac{\lambda}{a_{r_1 r_p}} x_{r_1}. \qquad (10)$$

Тогда из (8) и (10) следует, что

$$x_{r_1} \le \frac{\lambda}{a_{r_2 r_1}} \frac{\lambda}{a_{r_3 r_2}} \cdots \frac{\lambda}{a_{r_p r_{p-1}}} \frac{\lambda}{a_{r_1 r_p}} x_{r_1}.$$

Из последнего неравенства следует, в силу положительности x_{r_1}, что

$$\lambda^p \ge \prod_{m=1}^{p} a_{r_{m+1} r_m},$$

где $r_{p+1} = r_1$.

Неравенство (2) доказано.

Из (2) следует, в силу произвольности выбора p и $r_1, \ldots, r_p$, что

$$\lambda \ge \max_{1 \le p \le n^2} \left(\max_{1 \le r_1, \ldots, r_p \le n} \prod_{m=1}^{p} a_{r_{m+1} r_m} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $r_{p+1} = r_1$ для любого $1 \le p \le n^2$.

Теорема доказана.

Сделаем некоторые замечания по поводу доказанной оценки (1).

1. Вид пределов изменения для p обусловлен тем, что количество элементов произвольного непустого подмножества множества всех элементов матрицы размера $n \times n$ заключено между 1 и n^2.

2. Оценка (1) равносильна оценке вида

$$\lambda \ge \max_{1 \le p \le n} \left(\max_{1 \le r_1, \ldots, r_p \le n} \prod_{m=1}^{p} a_{r_{m+1} r_m} \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (11)$$

где $r_{p+1} = r_1$ для любого $1 \le p \le n$; $p, r_1, \ldots, r_p$ – произвольные целые числа, изменяющиеся в указанных пределах, и $r_i \ne r_j$ для любых $1 \le i, j \le p$, $i \ne j$.

Это следует из того, что при отыскании максимума в правой части (1) можно не учитывать любой набор индексов, в котором имеется хотя бы одна пара совпадающих индексов.

Действительно, пусть q – некоторое фиксированное целое число, $1 \le q \le n^2$; $t_1, \ldots, t_q$ – некоторый набор индексов, $1 \le t_1, \ldots, t_q \le n$, причем существуют такие $1 \le i, j \le q$, $i \ne j$, что $t_i = t_j$. Пусть, для определенности, $i < j$.

В силу соотношения (2) имеем

$$\lambda^q \ge a_{t_2 t_1} \dots a_{t_i t_{i-1}} a_{t_{i+1} t_i} \dots a_{t_j t_{j-1}} a_{t_{j+1} t_j} \dots a_{t_1 t_q} .$$

В силу равенства $t_i = t_j$ получаем

$$\lambda^q \ge a_{t_2 t_1} \dots a_{t_j t_{i-1}} a_{t_{i+1} t_j} \dots a_{t_j t_{j-1}} a_{t_{j+1} t_j} \dots a_{t_1 t_q} . \qquad (12)$$

Заметим, что оценка (12) является следствием следующих оценок:

$$\lambda^{q+i-j} \ge a_{t_2 t_1} \dots a_{t_j t_{i-1}} a_{t_{j+1} t_j} \dots a_{t_1 t_q} ,$$

$$\lambda^{j-i} \ge a_{t_{i+1} t_j} \dots a_{t_j t_{j-1}} ,$$

которые получаются из (2), соответственно, при $p = q + i - j$, $r_1 = t_1$, $r_2 = t_2$, …, $r_{i-1} = t_{i-1}$, $r_i = t_j$, $r_{i+1} = t_{j+1}$, …, $r_{q+i-j} = t_q$ и при $p = j - i$, $r_1 = t_j$, $r_2 = t_{i+1}$, …, $r_{j-i} = t_{j-1}$.

Следовательно, оценку (12) можно не учитывать при отыскании максимума в правой части (1). Значит, в силу произвольности выбора q и $t_1, \dots, t_q$, при отыскании максимума в правой части (1) достаточно учитывать лишь те наборы индексов $r_1, \dots, r_p$, в каждом из которых все индексы различны между собой. Тем самым доказано, что оценка (1) равносильна оценке (11).

3. Если A – положительная матрица, то в оценке (1) имеет место знак строгого неравенства.

Это следует из того, что для положительной матрицы

$$\varepsilon_m = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne r_m}}^{n} a_{r_{m+1} j} x_j > 0 , \quad 1 \le m \le p .$$

4. Существуют неразложимые неотрицательные матрицы, для которых оценка (1) является неулучшаемой.

Рассмотрим, например, следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{13}, a_{21}, a_{32} > 0$. A является неразложимой неотрицательной матрицей. Максимумы, указанные в (1), достигаются для нее при $p = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ и

$$\lambda = \left(\prod_{m=1}^{3} a_{r_{m+1} r_m} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\prod_{i=1}^{3} a_{i+1\, i} \right)^{\frac{1}{3}},$$

где $a_{43} = a_{13}$.

5. Ослабляя оценку (1), можно получить следующие наглядные неравенства:

$$\lambda \ge \left[\max_{1 \le i, j \le n} \left(a_{ji}\, a_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (13)$$

$$\lambda \ge \left[\max_{1 \le i, j, l \le n} \left(a_{ji}\, a_{lj}\, a_{il} \right) \right]^{\frac{1}{3}}. \qquad (14)$$

Действительно, для $p = 2$

$$\lambda \ge \left[\max_{1 \le r_1, r_2 \le n} \left(a_{r_2 r_1}\, a_{r_1 r_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

или, полагая $r_1 = i$, $r_2 = j$, получим (13). Аналогично получается (14).

6. Из (13) следует неравенство

$$\lambda \ge \left(\prod_{i,j=1}^{n} a_{ij} \right)^{\frac{1}{n^2}},$$

т. е. доминирующее собственное значение неразложимой неотрицательной матрицы ограничено снизу средним геометрическим ее матричных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Двусторонние оценки доминирующего собственного значения неразложимой неотрицательной матрицы дают представление о расположении ее спектра в некотором кольце на комплексной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы. М., 2000. С. 167.
2. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М., 1972. С. 124.
3. *Волков И.К., Загоруйко Е.А.* Исследование операций. М., 2004. С. 324.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 2010. С. 380, 339.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989. С. 359.

Поступила в редакцию 16 мая 2014 г.

Fomin V.I. ON LOWER BOUND OF DOMINANT OWN VALUE OF INDECOMPOSABLE NONNEGATIVE MATRIX

Offer some lower bound for the dominant eigenvalue indecomposable nonnegative matrix.

Key words: indecomposable nonnegative matrix; dominant own value; lower limit; positive own vector; spectral radius.

Фомин Василий Ильич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и механики, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Fomin Vasiliy Ilyich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru