ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ

УДК 1:001; 001.8

ФИЛОСОФСКАЯ ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ: ОТ АБСОЛЮТИЗМА К ФАЛЛИБИЛИЗМУ

© Николай Владимирович МЕДВЕДЕВ
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор философских наук, профессор, зав. кафедрой философии, e-mail: philosophy.tsu@mail.ru
© Евгения Евгеньевна МЕДВЕДЕВА
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра философии, e-mail: philosophy.tsu@mail.ru

Подвергнуто критике господствующее в философии математики абсолютистское представление, согласно которому любая математическая истина является абсолютно обоснованной, а значит, непогрешимой, и математика, возможно, является единственной формой несомненного, объективного знания. Данная теоретическая позиция соотнесена с противоположной фаллибилистской точкой зрения. Для последней характерно убеждение, что математическая истина может изменяться, и ее не следует рассматривать как неподлежащую процедурам проверки и / или исправления. Абсолютистский подход к математическому знанию был поставлен под сомнение в начале XX в. после того, как были выявлены логические парадоксы и противоречия в теории множеств Кантора и логико-математической системе Фреге. Полученные данные имели серьезные последствия для абсолютистского представления о математическом знании. Складывалось убеждение, что обнаруженные антиномии являются следствием наличия погрешностей в самих основаниях математики. Итогом кризиса стало развитие ряда направлений в философии математики, целями которых являлось обоснование математики и восстановление ее статуса как абсолютно достоверной науки. Рассмотрены три ведущие программы обоснования математики – логицизм, формализм и конструктивизм (тесно связанный с интуиционизмом). В каждой из программ устанавливалось, что именно гарантирует надежную основу абсолютной истины: аксиомы логики (логицизм); интуитивно достоверные принципы метаматематики (формализм); интуитивно самоочевидные аксиомы и правила (интуиционизм). Рассмотренные программы обоснования математического знания используют дедуктивную логику для демонстрации истинности математических теорем. Однако ни одной из программ не удалось установить абсолютную обоснованность математической истины. По мере накопления знаний об основах математики становилось ясным, что абсолютистская точка зрения является всего лишь идеализацией, скорее мифом, чем реальностью. Опыт осмысления проблемы обоснования математического знания в XX в. подводит нас к выводу, что абсолютистский подход, свойственный традиционной математике, порождается в результате идеализации природы математической истины. Математики и философы, исходящие из платоновского представления о незыблемости, надежности и абсолютном характере математического знания, мало обращали внимания на историю математической науки и действительную математическую практику. Поэтому позицию фаллибилизма следует рассматривать как реалистичный взгляд на математическое знание и математическую деятельность.

Ключевые слова: философия математики; основания математического знания; абсолютизм; фаллибилизм; натурализм; эмпиризм; формализм; интуиционизм; конструктивизм.

Центральной проблемой философии математики является обоснование математического знания. Содержание данной проблемы образует ответы на принципиальные вопросы об источнике необходимости математических утверждений и достаточных основаниях для их принятия [1, с. 5]. В философии математики XX столетия доминирующей являлась установка на поиск абсолютных оснований математического знания. Данная установка совпадает с ключевой интенцией классической эпистемологии на обнаружение абсолютных оснований знания в целом и его главной опоры – математического знания в частности. Такие усилия предпринимались первоначально Платоном, а уже в XVII в. в обновленном виде Декартом.

Цель исследования заключается в критической оценке господствующего в философии математики *абсолютистского* представления о том, что любая математическая истина является абсолютно обоснованной, а значит непогрешимой, и математика (наряду с логикой) является, возможно, единственной областью несомненного, объективного знания. Данная теоретическая позиция будет соотнесена нами с противоположной, т. н. *фаллибилистской*, точкой зрения. Для последней характерно утверждение, что математическая истина может изменяться, и ее не следует рассматривать как неподлежащую процедурам проверки и / или исправления.

ФАЛЛИБИЛИЗМ VERSUS АБСОЛЮТИЗМ

Первым философом математики, акцентировавшим значение абсолютистско-фаллибилистской дихотомии, был И. Лакатос, который соотносил ее с древним спором между догматиками и скептиками [2]. По словам И. Лакатоса, «догматики утверждают, что силой нашего человеческого интеллекта и чувств, или только одних чувств, мы можем достичь истины и узнать, что мы ее достигли. Скептики, с другой стороны, или утверждают, что мы совершенно не можем достичь истины (разве только при помощи мистического эксперимента), или что если даже сможем достичь ее, то не можем знать, что мы ее достигли» [3]. Философские работы И. Лакатоса послужили импульсом для становления первой философии новой математики из тех, которые хотели дать альтернативу по отношению к фундаменталистским школам [4, с. 223]. Термин «фаллибилизм» И. Лакатос заимствовал из «критического фаллибилизма» К. Поппера, адаптировав его к философии математики.

В современной философии имеются некоторые расхождения по вопросу толкования термина «фаллибилизм». Так, по словам А.А. Печенкина, «фаллибилизм – позиция философа, произносящего с сократовской улыбкой: «Нельзя ошибаться только в том, что все теории ошибочны» [5, с. 83]. По утверждению английского исследователя С. Хаэк, «фаллибилизм является тезисом (1) о нашей *подверженности ошибкам*; а не тезисом (2) о *модальном статусе* (возможной ошибочности) *того, во что мы верим*» [6, p. 309]. Правда, Э. О'Хеар, напротив, считает, что фаллибилизм является представлением о том, что любые человеческие мнения и суждения могут оказаться ошибочными, т. е. придерживается тезиса (2) [7]. По мнению П. Эрнеста, ссылающегося на точку зрения И. Лакатоса, фаллибилизм означает теоретическую возможность того, что любое принятое знание, включая математическое знание, способно утратить свой *модальный статус истинного или необходимого* [8, p. 9]. Таким образом, фаллибилизм является утверждением о предположительном, относительном характере любого научного знания, что в свою очередь налагает на ученого необходимость осуществлять процедуры критики, опровержения или вынесения новых догадок для совершенствования знания. Фаллибилисты, по существу, отказываются от поиска архимедовой опорной точки познания, будучи уверенными в отсутствии твердого, предельного основания знаний.

Противоположностью фаллибилизму является позиция, именуемая *абсолютизмом*, т. е. представление о математическом знании как несомненном, достоверном и непогрешимом. В истории философии была развернута широкая дискуссии, посвященная осмыслению понятия «Абсолют». Данное понятие было обстоятельно исследовано в метафизической системе Г.В.Ф. Гегеля, а также в идеалистических учениях Б. Бозанкета, Ф.Г. Брэдли, Д. Ройса и других философов [9]. Знаменитый американский философ-прагматист У. Джеймс придал термину «абсолютизм» эпистемологический смысл, противопоставив абсолютизму эмпиризм [10, p. 102-106]. Применительно к философии математики термин «абсолютизм» одним из первых использовал Дж. Конфри [11]. В литературе можно встретить противопоставление абсолютизму релятивизма. Так, Р. Харе и М. Краусц в своей книге «Разновидности релятивизма» (1996) осуществили критический анализ различных форм абсолютизма и релятивизма [12].

Абсолютистско-фаллибилистская оппозиция отражает важнейшее эпистемологическое различие между конкурирующими объяснительными схемами природы математики и математического знания. Это различие присутствует не только в философии и математике, но и других областях знания. Абсолютистско-фаллибилистская дихотомия имеет некоторое сходство с широко известным противоборством двух школ философии математики – «априоризма» и «натурализма». Согласно английскому исследователю Ф. Китчеру, априоризм есть «учение о том, что математическое знание является априорным», другими словами, математические высказывания несут в себе определенную необходимость, которая не может быть выведена из опыта [13].

Другое направление в философии математики – натурализм – противоположен в своих исходных принципах априоризму, поскольку признает существование эмпирических или квази-эмпирических источников обоснования математического знания. Этот подход включает два основных тезиса: 1) каждый момент в развитии математики зависит только от уже существующей математики, а не от эпистемологических ограничений и выборов; 2) математика организуется посредством гипотетико-дедуктивного метода, пытаясь тем самым найти аксиомы [4, с. 158]. Существующая философия математики должна смириться с этим и предложить натуралистическое обоснование математики. Несмотря на имеющиеся различия в указанных выше оппозициях «абсолютизм – фаллибилизм» и «априоризм – натурализм», между ними обнаруживаются определенные параллели.

АБСОЛЮТИСТСКИЙ ПОДХОД К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ЗНАНИЮ И ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФУНДАМЕНТАЛИЗМ

Для достижения поставленной в исследовании цели, направленной на критику абсолютистской философии математики, мы постараемся идентифицировать концепцию абсолютизма через понятие «гносеологический фундаментализм». Термин «фундаментализм» часто используется в научной литературе для описания классического подхода в теории познания, согласно которому «следует найти такой фундамент наших знаний, относительно которого не возникает никаких сомнений. Все то, что претендует на знание, но в действительности не покоится на этом фундаменте, должно быть отвергнуто» [14, с. 105]. В таком случае вера и знание образуют две составные части – базис (фундамент) и надстройку. Надстройка в своем обосновании полностью зависит от базиса, а не наоборот [15]. Имеющееся у познающего субъекта содержание знания может быть выражено посредством отдельного предложения либо логически связанной системы предложений (теории). Таким образом, широко распространенным эпистемологическим положением является утверждение, что всякое знание репрезентируется через набор предложений, который принимается на основе процедур верификации и обеспечивается надежным фундаментом. С этой точки зрения математическое знание состоит из совокупности предложений, подкрепленных доказательствами.

Как известно, математические доказательства основаны на дедуктивном рассуждении, содержащем цепочки необходимых выводов. Так как математическое знание обосновывается только разумом без обращения к эмпирическим данным, то оно понимается как самое непогрешимое и достоверное в сравнении со всеми остальными формами научного знания. Математическое знание исключает всякую возможность заблуждения, порождаемого механизмом чувственного восприятия и другими эмпирическими источниками порождения знания. Традиционно философия математики видит свою задачу в том, чтобы обеспечить математику как науку прочной основой, иными словами, наделить математическое знание определенной системой, к которой оно может быть сведено как к основе своего истинного значения. Данная фундаменталистская установка зависит от ряда конкретных допущений, выбор и принятие которых (в явной или неявной форме) образует ту или иную парадигму обоснования математического знания.

Таким образом, главным предметом философии математики является вопрос: «Существует ли или может ли существовать абсолютно незыблемая основа математического знания и математической истины?». Положительный ответ на этот вопрос служит основанием в поддержку фундаментализма, т. е. классического эпистемологического воззрения, согласно которому функция философии математики заключается в том, чтобы обеспечить предельную и непогрешимую основу математического знания. Фундаментализм прочно связан с абсолютистским представлением о математическом знании, поскольку затрагивает проблему обоснования математики как главного предмета философии математики. Стратегия нашей критики фундаментализма имеет двоякую направленность. Во-первых, необходимо осуществить ревизию фундаменталистского тезиса, оправдывающего наличие незыблемого базиса математического знания. В своей аргументации мы постараемся доказать невозможность существования абсолютного фундамента математического знания. Во-вторых, необходимо подвергнуть критическому разбору тезис о непогрешимости «надстроечного» математического знания, выводимого из его фундамента. Мы убеждены, что полученное таким способом математическое знание может оказаться одновременно ошибочным и неполным.

Американские философы Ф. Китчер и У. Эспрей приписывают становление эпистемологической (или фундаменталистской) тенденции в современной философии математики немецкому математику, логику Г. Фреге, который подверг всестороннему анализу ряд возможных философских допущений арифметики [16; 17]. Его работа «Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование о понятии числа» (1884) сегодня признана в качестве классического выражения аналитического способа рассуждений, который, возможно, был впервые применен в философии математики. В последней четверти XIX в. Г. Фреге поставил перед собой задачу: обосновать математическое и арифметическое знание, построенное на прочном фундаменте. Рациональные усилия Фреге стали естественным продолжением деятельности ряда ученых (Ю.В.Р. Дедекинда, К.Т.В. Вейерштрасса и др.), направленной на создание прочных основ математики. Таким образом, Г. Фреге поместил в центр философии математики фундаменталистскую эпистемологически ориентированую программу. Он скрупулезно проанализировал возможные источники необходимой истины математики. Г. Фреге различал априорные и апостериорные процедуры обоснования математики, а также резко критиковал предположение, что основание математического знания может быть эмпирическим или апостериорным. Его убеждение сводилось к тому, что процедуры обоснования математики должны быть *априорными*. Существуют определенные возможности для оправдания *априорного* знания вообще и, соответственно, арифметического знания в частности. Проанализированные Г. Фреге способы обоснования математического знания послужили источником доминирующего в философии математики XX в. направления – *логицизма*.

Таким образом, абсолютистский подход к математическому знанию сводится к представлению, что математика состоит из непогрешимых, не подлежащих пересмотру абсолютных истин и представляет собой уникальную область достоверного знания, которое является необходимо истинным во всех возможных ситуациях. Математические высказывания примыкают к логическим и аналитическим высказываниям, которые рассматриваются как истинные в силу значения входящих в них терминов (например, «Все холостяки не женаты»).

Многие философы в прошлом и в настоящее время придерживаются абсолютистских воззрений на природу математического знания. Например, представитель логического позитивизма и логического эмпиризма А.Дж. Айер, будучи сторонником представления о непогрешимости математического знания, признает, что «истины математики и логики каждому кажутся необходимыми и достоверными [18, с. 104]. «Достоверность априорных пропозиций, – пишет А.Дж. Айер, – зависит от того факта, что они суть тавтологии» [18, с. 29].

Утверждение, что математика и логика формируют необходимое знание (истину), подкрепляется ссылкой на роль дедуктивного метода. Так, по словам Б. Рассела, «математика является дедуктивной наукой: начиная с определенных предпосылок, она прибывает, строгим процессом дедукции, к различным теоремам, которые и составляют математику» [19, с. 175]. Все математические теоремы устанавливаются посредством дедуктивных доказательств, постольку они являются необходимо истинными. Это служит основанием для заявлений многих философов о непогрешимости математических истин.

Абсолютистское представление о математическом знании покоится на двух типах предположений: 1) на предположениях математики, которые связаны с предположениями об аксиомах и определениях; 2) на предположениях логики, которые касаются предположений об аксиомах, правилах вывода, а также формальном языке и его синтаксисе. Это образует то, что можно назвать *микроуровневым* характером предположений. Существует также возможность формирования *макроуровневого* характера предположений, например, логический вывод является достаточным для установления всех математических истин, или логический метод является всегда надежным методом [8, p. 15].

Абсолютистский подход к математическому знанию был поставлен под сомнение в начале XX в. после того, как были выявлены логические парадоксы и противоречия в теории множеств Кантора и логико-математической системе Г. Фреге [20, с. 20-42; 21, с. 26-36]. Полученные данные имели серьезные последствия для абсолютистского представления о математическом знании. Если математика является достоверной наукой, то как возможны противоречия (т. е. логические погрешности) в ее теоремах? Складывалось убеждение, что обнаруженные антиномии являются следствием наличия погрешностей в самих основаниях математики. Итогом кризиса стало развитие ряда направлений в философии математики, целями которых являлось обоснование математики и восстановление ее статуса как абсолютно достоверной науки. Можно выделить три ведущие программы обоснования математики – логицизм, формализм и конструктивизм (тесно связанный с интуиционизмом). Основные концептуальные положения этих направлений философии математики были развернуты в первой половине XX столетия.

ЛОГИЦИЗМ

Логицизм является учением, согласно которому «чистая математика» сводима к «чистой логике». Наиболее известными представителями этого направления в разрешении вопроса о природе математики являются Г. Фреге, Б. Рассел, А. Уайтхед, Р. Карнап. Как указывает П.Л. Бенацерраф, «логицизм укладывается в несколько различных версий, каждая со своими новшествами, но большинство из версий имеет следующую общую структуру: 1) истины арифметики *переводимы* в истины логики; 2) (1) демонстрируется тем, что (а) устанавливаются определения для «внелогического» словаря (понятий) арифметики в «сугубо логических» терминах и (б) отмечается, что переводы, санкционированные этими определениями, перевели арифметические истины в логические истины, а арифметические ложные утверждения – в логические ложные; 3) относительно этой арифметической демонстрации затем утверждается, что обоснована аналитичность математических пропозиций, потому что (а) поскольку определения по предположению сохраняют значение, логические переводы имеют то же самое значение, что и арифметические оригиналы и (б) сами *логические* истины мыслятся истинными в силу значения, в данном случае – значений встречающихся в них логических частиц (и, таким образом, аналитическими)» [21, с. 195].

Таким образом, в логицистской программе обоснования математики можно выделить два основных тезиса. Первый, что все понятия математики могут быть сведены в конечном итоге к логическим понятиям. И второй, что все математические истины могут выводиться из аксиом посредством чисто логических выводов. Цель отмеченных установок логицизма вполне очевидна. Если вся математика может быть выражена исключительно в логических терминах и доказана на основе логических принципов, то в таком случае математическое знание необходимо редуцировать к логике. Логика тем самым должна обеспечить надежное основание математической истины. При осуществлении этих положений логицистская программа должна обеспечить непогрешимые логические основания математического знания, установив абсолютную достоверность математики.

Однако программа логицизма потерпела неудачу. Дело в том, что математика включает в свое содержание нелогические правила вывода и аксиомы, такие как принцип математической индукции, аксиома бесконечности, аксиома выбора. «Но хотя все логические (или математические) суждения могут быть выражены полностью в терминах логических констант вместе с переменными, – говорит Б. Рассел, – обратное утверждение, что все суждения, которые могут таким образом выражены, являются логическими, неверно. Мы нашли до сих пор необходимый, но не достаточный критерий математических суждений. Мы достаточно определили характер примитивных *идей* в таких терминах, в которых могут быть *определены* все идеи математики, но не примитивные *суждения*, из которых все суждения математики могут быть *дедуцированы*. Это более трудное дело, относительно которого мы еще не знаем полного ответа. Мы можем взять аксиому бесконечности как пример суждения, которое, хотя оно может быть уточнено в логических терминах, не может утверждаться логикой как истинное» [19, с. 217]. В последующем данное высказывание Б. Рассела нашло свое подтверждение. В самом деле, математика является наукой, которая обладает специфическим содержанием, а математические теоремы зависят от нередуцированного набора математических предположений. Тем самым опровергаются базисные утверждения логицизма. Позднее Б. Рассел приступил к разработке более умеренной версии логицизма.

Еще одно возражение против фундаменталистского предприятия логицизма связано с тем, что логицизм не ставит под сомнение достоверность и надежность применяемого логического аппарата. Однако эта надежность определяется необоснованными предположениями. Все это означает, что общая программа логицизма оказалась не способна обеспечить математику прочными основаниями. Отсюда можно заключить, что логицистская программа о необходимости сведения математического знания к логическому оказалась на деле неосуществленной. «Это течение, – по словам Г. Лолли, – не отвечает принципу объективности, т. к. признает, что математика состоит из истин, не зависящих от субъективной деятельности, однако не подводит под это нечто объективное, к чему бы эти истины относились» [4, с. 172]. Логика не обеспечивает математическое знание достоверным фундаментом, и саму надежность математического знания нельзя свести к чистой логике.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что логицизм, как математическая исследовательская программа обоснования математики, дал интересные и плодотворные результаты. Логическое определение многих математических понятий, теория типов Б. Рассела, экспликация пропозициональной логики первого порядка, развитие теории доказательства, – все это можно отнести к несомненным успехам логицизма. Но как философия математики, особенно как эпистемология, призванная обеспечить надежность построенного на прочном фундаменте математического знания, логицизм потерпел неудачу.

ФОРМАЛИЗМ

Формализм, выражаясь общедоступным языком, есть представление о том, что математика – это бессмысленная формальная игра со знаками на бумаге в соответствии с определенными правилами. Истоки формалистского воззрения можно обнаружить в трудах английского философа Дж. Беркли [22]. Главными представителями формализма являются Д. Гильберт, Дж. фон Нейман и Х. Карри [23–26].

Формалистская программа Д. Гильберта была направлена на перевод математики в неинтерпретируемые формальные системы, которые должны показать адекватность представлений любой математики посредством создания ограниченной, но осмысленной («финитной») метаматематики, которая строит и манипулирует конечными объектами и символами. Метаматематические доказательства должны показать, что формальные аналоги всех математических истин могут производиться в формальных математических системах. Также они призваны демонстрировать через цепь последовательных доказательств, что формальные системы надежны для представления математического знания. В этом случае логика и математика оказываются неразрывно связанными. По словам Д. Гильберта, замысел его теории заключается в том, чтобы «установить определенную надежность математического метода» [23].

Формалистская программа обоснования математики содержит два основных утверждения.

1. Чистая математика может быть выражена неинтерпретированными формальными системами, в которых истины математики представлены формальными теоремами.

2. Надежность этих формальных систем может быть продемонстрирована в терминах их свободы от непротиворечивости с помощью метаматематики.

Это очень конкретные утверждения. Тем не менее две теоремы К. Гёделя о неполноте показали, что программа формализма не может быть выполнена. Первая теорема К. Гёделя утверждает, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует невыводимая и неопровержимая формула. В таком случае опровергается первое утверждение формализма. Для математика, который работает внутри формальной арифметики, доказательство ее непротиворечивости выступает как нематематическое доказательство, которое является внешним к этой системе [4, с. 175]. Это означает, что не может существовать единой общей теории для математики, которая способна исчерпать все математические доказательства. Невозможно перевести нетривиальные арифметические теоремы в формальные системы таким образом, чтобы истины математики были представлены формальными теоремами.

Вторая теорема К. Гёделя о неполноте утверждает, что если формальная арифметика непротиворечива, то в ней не выводима некоторая формула, содержательно утверждающая непротиворечивость этой арифметики. Другими словами, в отдельных случаях последовательность (непротиворечивость) доказательств требует создание метаматематики более сильной, чем та, которая может быть гарантирована системой. Например, чтобы доказать непротиворечивость арифметики Дж. Пеано потребуется использовать все аксиомы этой системы наряду с такими предположениями, как принцип трансфинитной индукции над исчисляемыми порядками. Таким образом, невозможно доказать последовательность большинства формальных систем математики без указанного допущения. В конечном итоге программа формализма так и не была выполнена.

В случае своего успеха формалистская программа могла бы обеспечить поддержку абсолютистского воззрения на математическую истину. Формальное доказательство, основанное на последовательных формальных системах, послужило бы краеугольным камнем математической истины. Тем не менее оба утверждения формализма были опровергнуты. Не все истины математики могут быть представлены в виде теорем в формальных системах, и, кроме того, сами эти системы не могут считаться абсолютно надежными.

В результате опровержения формалистской программы Д. Гильберта доказательствами К. Гёделя формалисты, как прежде логицисты, стали занимать более умеренную позицию. Так, современный фомалист Х. Карри отказался от второго утверждения формализма, но поддержал первое, согласно которому математика есть наука о формальных системах и формальных методах [25; 26]. Однако такая позиция является неоправданной в контексте философии математики, поскольку формальные системы охватывают лишь собственное подмножество математического знания, упуская из виду конструктивную или рекурсивную математику.

Несмотря на то, что программа формализма была опровергнута, некоторые современные математики по-прежнему считают себя формалистами. Например, американские математики А. Робинсон, П.Дж. Коэн писали свои работы в духе формализма [27; 28]. Тем не менее мало кто сегодня из философов математики стремится держаться за опровергнутые фундаменталистские (или эпистемологические) утверждения формалистов. Чаще находит поддержку их онтологическая (антиреалистическая) платформа.

Американские философы У. Куайн и Х. Патнэм отмечают существующие параллели между формализмом и номинализмом как философиями математики [29; 30]. Позиция номинализма берет свое начало в средневековом мышлении схоластов. Номинализм фокусируется на символической функции языка и подобно формализму отрицает, что язык обозначает реальные универсалии или абстрактные сущности. Современные сторонники номинализма признают, что отрицание абстрактных сущностей базируется лишь на философской интуиции, которая не может быть обоснована с помощью обращения к какому-либо более фундаментальному аргументу или доводу [31]. За исключением абстрактного понятия символа формалисты, в целом, придерживаются номиналистической направленности [4, с. 99]. Однако, несмотря на явные сходства этих двух школ философии математики, те проблемы, которые рассматриваются в номинализме, относятся скорее к области онтологии, чем эпистемологии.

Формализм и связанные с ним исследования оснований математики можно оценивать с двух точек зрения: философской и математической. С философской точки зрения мы можем резюмировать, что формализм есть неудавшаяся попытка, особенно в эпистемологическом плане, обеспечить математические знания прочной основой. Правда, некоторые исследователи полагают, что формалистская программа оснований математики может быть реанимирована в случае усиления финитарных методов, что, на наш взгляд, является скорее самообманом. С математической точки зрения данная программа привела к разработке и уточнению аксиоматических систем, особенно теории множеств, теории доказательства, метаматематики, а также внесла свой вклад в развитие рекурсивной теории, машины Тьюринга, лямбда-исчисления и других аспектов формальной математики, оказавшихся крайне важными для теории вычисления. Все это указывает на некоторые сильные и важные результаты, полученные на основе разработки программы формализма. Поэтому *математический* формализм следует признать успешной исследовательской программой.

Однако, по словам Г. Лолли, «нерешенной проблемой всех версий формализма остается обоснование применимости математики. Применимость проявляется как невероятная удача, невероятное стечение обстоятельств, состоящее в том, что системы, с которыми мы предпочитаем играть (по эстетическим причинам, традиционным или другим), оказываются также полезными и высокоэффективными» [11, с. 176].

КОНСТРУКТИВИЗМ

Истоки зарождения конструктивистского подхода в математике можно проследить в трудах немецкого мыслителя И. Канта [32]. И. Кант разработал сложную систему философии, основанную на ряде универсальных внутренне данных категориях восприятия и мышления, включающих пространство и время как априорные формы чувственного созерцания. Он считал, что знание геометрии и чисел есть результат развертывания нашей внутренней интуиции в пределах этих двух категорий. Благодаря пространству и времени мы способны воспринимать расположение и границы объектов, последовательность событий. В итоге он назвал априорными синтетическими истинами геометрию Евклида и теорию чисел. После смерти И. Канта появление неевклидовой геометрии привело его последователей к отказу от представления, что евклидова геометрия состоит из априорных синтетических истин, полученных на основе чистой интуиции пространства. Однако отдельные интуиционисты, например голландский математик Л. Брауэр, поддерживают другое положение в учении И. Канта. Оно состоит в том, что истинные суждения о числах являются априорными синтетическими и проистекают из нашей базисной внутренней интуиции времени. Привлекательность этой точки зрения обусловлена тем, что она закрепляет математическое знание, по крайней мере арифметическое, за интуицией, гарантируя его субъективно значимый характер.

Конструктивизм является одной из программ построения математического знания и реформирования математической практики с целью предохранить от потери смысла и избежать противоречий. Поэтому конструктивисты отвергают неконструктивистские аргументы, такие как доказательство Г. Кантора, что действительные числа неисчислимы, а также существующие доказательства посредством *сведения к абсурду*, логические законы двойного отрицания и исключенного третьего. Конструктивисты считают, что данные результаты и способы рассуждения выводят математику за пределы того, что можно создавать интуитивно.

Наиболее известными конструктивистами являются интуиционисты Л. Брауэр и А. Гейтинг [33; 34]. Американский математик Е. Бишоп продвинул конструктивистскую программу далеко вперед путем перестроения значительной части анализа конструктивными средствами [35]. В настоящее время продолжают сосуществовать отдельные формы конструктивизма, образуя целый спектр различных позиций: ультра-интуиционизм (А.С. Есенин-Вольпин) [36], строгий философский интуиционизм (Л. Брауэр), умеренный интуиционизм (А. Гейтинг, Г. Вейль), современный логический интуиционизм (А. Троэлстра), либеральный конструктивизм (Э. Бишоп, Л. Калмар, Г. Крайзель). Современный «строгий финитизм», который пользуется незначительной поддержкой философов и математиков, также может быть классифицирован как конструктивистская позиция.

Все математики-конструктивисты разделяют мнение, что классическая математика является ненадежной, поэтому она нуждается в перестройке с использованием «конструктивных» методов и рассуждений. Конструктивисты заявляют, что математические истины и существование математических объектов должно устанавливаться посредством только конструктивных методов. Это означает, что все требующееся для установления истины или существования объекты есть математические конструкции. Согласно конструктивистам, знание должно устанавливаться через конструктивные доказательства, основанные на конструктивной логике, а значение математических терминов и объектов устанавливается формальными процедурами, при помощи которых они создаются.

Несмотря на то, что некоторые конструктивисты заявляют, что математика есть изучение конструктивных процессов, выполняемых с помощью карандаша и бумаги, более строгая позиция, т. н. «брауэровских» конструктивистов, сводится к утверждению, что математика производится в основном в уме, а письменная математика вторична. Вследствие этого любые аксиоматизации интуиционистской логики считаются неполными.

Другие, более либеральные, интуиционисты, такие как Л. Калмар, могут отвергать представление, что письменная математика есть лишь слабый отблеск «подлинной» интуиционистской математики, тем не менее, они соглашаются с тем, что интуиция может привести в последующем к созданию новых аксиом [37]. Таким образом, интуиционизм исходит из представления, что основание и ядро математического знания развивается благодаря творческой активности людей. Интуиционизм представляет собой наиболее полно выраженную версию конструктивистской философии математики. Выделяют два различных утверждения интуиционизма, которые М. Даммит назвал «позитивным и негативным тезисами» [38]. Позитивный тезис сводится к утверждению, что интуитиционистский способ конструирования математических понятий и логических операций является последовательным и законным, и что интуиционистская математика формирует осмысленную часть теории. Негативный тезис сводится к тому, что классический способ конструирования математических понятий и логических операций является непоследовательным и незаконным, что классическая математика, хотя и содержит много ценного, тем не менее, она является бессмысленной в ее нынешнем виде [38, p. 360].

Следует сказать, что в отдельных разделах математики, где присутствуют классические и конструктивистские доказательства полученного результата, последние являются более предпочтительными чем первые, т. к. они более информативны. Если классическое доказательство существования может просто доказывать логическую необходимость существования, то конструктивное доказательство существования показывает, как построить математический объект, существование которого утверждается. С математической точки зрения, это укрепляет позитивный тезис. Однако предложенная М. Даммитом интерпретация позитивного тезиса *интуиционизма* не затрагивает такую его наиболее важную особенность, как фундаментализм.

Интуиционистская программа Л. Брауэра, А. Гейтинга и других ученых-математиков была нацелена на предположение новых, надежных основ для преодоления логических антиномий и парадоксов, для предотвращения их повторного возникновения в какой-то обновленной форме. При этом позитивный тезис интуиционизма, выраженный Л. Брауэром и А. Гейтингом, утверждает больше, чем просто согласованность, законность и осмысленность. Он также претендует на надежность и достоверность. Вместе с тем отмеченное эпистемологическое притязание интуиционистов оказалось на деле нереализуемым. Интуиционисты стремились обеспечить достоверную основу математической истины путем ее выведения из интуитивно необходимых аксиом и применения интуитивно надежных методов доказательства.

Данная концепция кладет в основание математического знания субъективную веру. Но абсолютная истина, которую интуиционисты так стремились обеспечить, не может быть основана исключительно на субъективном убеждении. Вера необходима, но далеко не достаточна, чтобы гарантировать знание. Для этого нужно также и веское обоснование.

«Интуиционизм пожертвовал большей частью математики в обмен на убаюкивающее заверение, будто то, что сохранилось, оправдывается нашей «изначальной интуицией» [36, p. 190]. Но достаточна ли субъективная, а не интерсубъективная вера интуиционистов для обоснования тезиса, что в качестве основания математики следует закрепить «изначальную интуицию»?

Согласно интуиционистам, базисная интуиция должна поставлять самоочевидные аксиомы, из которых затем формируется математическое знание и которые определяют его достоверность. Однако базисная интуиция не ведет к консенсусу относительно того, что это за аксиомы. Поэтому их следует признать субъективно обоснованными и различающимися в зависимости от конкретного субъекта. Указанная особенность является главным недостатком интуиционизма, что обусловило крушение фундаменталистской программы интуиционизма, а шире – конструктивизма.

Даже если бы интуиционисты были едины в своих интуициях, все же следовало привести аргументы, почему эти общие убеждения должны быть приняты как необходимые. В самом деле, если бы такое произошло с нами, то мы могли подумать, что это просто совпадение. Необоснованная вера не может конституировать знание независимо от того, сколь много людей ее разделяют. Обоснование или другой критерий истины являются важными для превращения веры в знание. Таким образом, выдвинутый интуиционистами позитивный тезис не создает необходимую основу даже для ограниченной области математического знания. Данная нами критика распространяется на все другие формы конструктивизма, которые также стремятся построить конструктивную математическую истину на фундаменте самоочевидных конструктивистских предположений. Поэтому интуиционизм (шире конструктивизм) не способен обеспечить прочную основу математического знания.

Отрицательный тезис интуиционизма также проблематичен. Интуиционизм не только не учитывает обоснования значительной части неконструктивной классической математики, но и отвергает ее законность и осмысленность. Вместе с тем конструктивистам не удалось показать ни того, что перед классической математикой стоят неизбежные проблемы, ни того, что она является непоследовательной, незаконной, не говоря уже об отсутствии в ней смысла. Безусловно, осмысленность классической математики демонстрируется ее общественным признанием и широким применением в современном технологическом мире, а также ее совместным сосуществованием с конструктивизмом. Очевидно, что именно благодаря осмысленности классической математики наблюдается рост числа профессиональных математиков. Классическая математика в своих допущениях, на которых она строится, отличается от конструктивистской математики. Поэтому некоторые результаты интуиционистской математики несовместимы с результатами классической математики. Например, интуиционистский действительный числовой континуум исчисляем. Это противоречит классическому выводу, не потому что здесь присутствует внутреннее противоречие, а потому что определение «действительных чисел» иное, отличное от конструктивисткого. Конструктивистские понятия часто несут другой смысл, который отличается от соответствующих классических понятий. Однако при этом мы должны помнить, что обе эти формы математики являются осмысленными и взаимно переводимыми. Поэтому отрицательный тезис интуиционизма нельзя поддерживать, скорее он должен быть отвергнут в силу своей необоснованности.

Несомненно, конструктивная математика является жизнеспособной и плодотворной областью исследований современной математики. Идеи конструктивистов внесли весомый вклад в теорию доказательств, теорию вычислимости, конструктивную теорию множеств и многие другие разделы математики. Сегодня продолжаются поиски конструктивных формулировок и доказательств классических результатов вычислений. Отдельные философы продолжают отстаивать позитивный тезис интуиционизма об осмысленном и легитимном способе конструирования математических понятий и логических операций. Вместе с тем следует подчеркнуть, что конструктивистская программа, с точки зрения философии математики, особенно если интерпретировать ее фундаменталистскую эпистемологию, потерпела неудачу. Допущение субъективных убеждений в качестве аксиоматической основы математики и логики не привело к обеспечению непогрешимости математического знания, чего так упорно добивался интуиционизм. Поэтому конструктивизм как абсолютистская философия математики (наряду с логицизмом и формализмом) так и не смог выполнить поставленную перед ним эпистемологическую задачу.

ВЫВОДЫ

Таким образом, сторонники абсолютизма в философии математики так и не сумели обосновать логическую необходимость истинности математического знания. Три программы обоснования математики – логицизм, формализм, интуиционизм (шире конструктивизм) – пытались обеспечить прочную основу математической истины посредством математического доказательства. В каждой из программ устанавливалось, что именно гарантирует надежную основу абсолютной истины: аксиомы логики (логицизм), интуитивно достоверные принципы метаматематики (формализм), интуитивно самоочевидные аксиомы и правила вывода (интуиционизм). Рассмотренные программы обоснования математического знания используют дедуктивную логику для демонстрации истинности математических теорем. Однако ни одна из программ не оказалась в состоянии установить абсолютную обоснованность математической истины. Дедуктивная логика способна только транслировать истину, а не вводить ее, поэтому заключение в логическом доказательстве не более достоверно, чем самая слабая посылка.

Тот факт, что трем направлениям философии математики и не удалось убедительно обосновать непогрешимость математического знания, вовсе не снимает с повестки обсуждение данной эпистемологической проблемы. Как мы убедились, предпринятые в прошлом усилия по обоснованию математики неизбежно приводят к порочному кругу. Дело в том, что любая математическая система зависит от определенного набора допущений, и попытки установить их достоверность посредством доказательств, как правило, приводят к бесконечному регрессу. Но использование допущений без доказательства способно привести к ошибкам, т. к. принимаемые допущения предстают как субъективные убеждения, а не необходимое знание. Все, что возможно сделать в таком случае, – это свести допущения к минимуму, чтобы получить редуцированный набор определенных аксиом, принимаемых без доказательства. Только таким способом нам может быть удастся разорвать порочный круг обоснования, правда, ценой утраты абсолютной достоверности. Единственной альтернативой этому является замена одного набора допущений на другой. Однако вместе с проведенной заменой начнется новый цикл порочного круга. Таким образом, достоверность математики не может быть обоснована без принятия определенных допущений, т. н. твердого грунта, предназначенного обеспечить абсолютную достоверность математического знания. Поскольку не существует иного веского оправдания математического знания, кроме доказательства, постольку математическое знание должно зависеть от определенных допущений. Однако эти допущения имеют статус верований, а не знания, и, следовательно, они могут оставаться открытыми для сомнения и исправления. Этот главный аргумент против возможности достижения достоверного знания в математике явно противоречит абсолютистским притязаниям фундаменталистски ориентированного мышления.

Представленная критика абсолютизма с необходимостью подводит нас к принятию противоположной, фаллибилистской, точки зрения на природу математического знания. Данная точка зрения сводится к утверждению, что математическое знание подвержено ошибкам и исправлениям в силу своей научной природы и не должно рассматриваться как располагающееся за пределами процедур проверки и исправлений. По словам П. Эрнеста, поддержка фаллибилистской точки зрения философами и математиками сегодня является более широкой, чем это иногда предполагают [8, p. 33]. Фаллибилизм, как и современный математический эмпиризм, движем антифундаменталистской интенцией и стремлением доказать, что математика не является априорной и абсолютной наукой. Фаллибилизм освобождает наше сознание от иллюзорной фундаменталистской идеи абсолютной истины и изменяет представление о математической деятельности.

Вместе с тем отказ от абсолютизма не следует воспринимать как изгнание математики из царства истины и определенности, в котором она долгое время пребывала. Так, в современной физике общая теория относительности потребовала от ученых отказаться от абсолютных, универсальных систем отсчета в пользу релятивисткой установки. В квантовой механике принцип неопределенности В. Гейзенберга означает невозможность одновременно точного определения координаты и импульса микрообъектов. Эти научные открытия вовсе не следует трактовать как утрату знаний об абсолютных системах отсчета или определенности. Напротив, принципы относительности и неопределенности в неклассической физике свидетельствуют о происходящем прогрессе в развитии научного знания, что в свою очередь требует разработки и применения обновленных методологических подходов для правильной интерпретации полученных результатов. Аналогичная ситуация имеет место и в математической науке.

По мере накопления знаний об основах математики становилось ясным, что абсолютистская точка зрения является всего лишь идеализацией, скорее мифом, чем реальностью. Опыт осмысления проблемы обоснования математического знания в XX в. подводит нас к выводу, что абсолютистский подход, свойственный традиционной математике, порождается в результате идеализации природы математической истины. Математики и философы, исходящие из платоновского представления о незыблемости, надежности и абсолютном характере математического знания, мало обращали внимание на историю математической науки и действительную математическую практику. Поэтому позицию фаллибилизма следует рассматривать как реалистичный взгляд на математическое знание и математическую деятельность, требующий от нас принять «честно математическую погрешимость» [2, с. 131] и освободиться от иллюзорных представлений о существовании абсолютистского эдемского сада.

Изучение проблемы обоснования математического знания показало, что происходившие в истории математической науки кризисные явления, как правило, приводят к переосмыслению ряда принципиальных идей математики и отказу от некоторых старых позиций, а не к разрушению построенного здания математики. Поэтому новые открытия в математике способствуют разработке необходимых концептуальных, логических и методологических средств для их осмысления и, в конечном счете, прогрессу математического знания.

1. *Светлов В.А.* Философия математики: Основные программы обоснования математики XX столетия. М., 2010.
2. *Лакатос И.* Бесконечный регресс и основания математики // Современная философия науки: знание, рациональность, ценности в трудах мыслителей Запада: учебная хрестоматия. М., 1996. С. 106-135.
3. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / пер. с англ. И.Н. Веселовского. М., 1967.
4. *Лолли Г.* Философия математики: наследие двадцатого столетия / пер. с итал. А.Л. Сочкова, С.М. Антакова, под ред. Я.Д. Сергеева. Н. Новгород, 2012.
5. Современная философия науки: знание, рациональность, ценности в трудах мыслителей Запада: учебная хрестоматия. М., 1996.
6. *Haack S.* Epistemology with a Knowing Subject // The Review of Metaphysics. 1979. Vol. 33. № 2.
7. *O'Hear A.* Fallibilism // A Companion to Epistemology / eds. J. Dancy, E. Sosa. Oxford, 1992.
8. *Ernest P.* Social constructivism as a philosophy of mathematics. Albany, 1998.
9. *Пассмор Дж.* Сто лет философии: пер. с англ. М., 1998.
10. *James W.* Essays in Radical Empiricism. Lincoln (Nebraska), 1996.
11. *Confrey J.* Conceptual Change Analysis: Implications for Mathematics and Curriculum // Curriculum Inquiry. 1981. Vol. 11 (5). P. 243-257.
12. *Harre R., Krausz M.* Varieties of Relativism. Oxford, 1996.
13. *Kitcher P.* The nature of mathematical knowledge. Oxford, 1984.
14. *Лекторский В.А.* Эпистемология классическая и неклассическая. М., 2001.

15. *Alston W.P.* Foundationalism // A Companion to Epistemology / eds. J. Dancy, E. Sosa. Oxford, 1992.
16. History and Philosophy of Modern Mathematics / eds. W. Aspray, Ph. Kither. Minneapolis, 1988.
17. *Фреге Г.* Основоположения арифметики: логико-математическое исследование о понятии числа: пер. с нем. Томск, 2000.
18. *Айер А.Дж.* Язык, истина и логика. М., 2010.
19. *Рассел Б.* Введение в математическую философию. Избранные работы / пер. с англ. В.В. Целищева, В.А. Суровцева. Новосибирск, 2007.
20. *Карри Х.Б.* Основания математической логики. М., 1969.
21. *Бенацерраф П.* Фреге: последний логицист // Логика, онтология, язык. Томск, 2006.
22. *Беркли Дж.* Трактат о принципах человеческого знания // Беркли Дж. Сочинения. М., 1978. С. 152-247.
23. *Гильберт Д.* О бесконечном // Гильберт Д. Основания геометрии. Москва; Ленинград, 1948.
24. *Neumann J. von.* The formalist foundations of mathematics // Benacerraf P., Putnam H. Philosophy of mathematics: selected readings. Englewood Cliffs; New Jersey, 1964.
25. *Карри Х.Б.* Основания математической логики. М., 1969.
26. *Curry H.B.* Outlines of formalist philosophy of mathematics. Amsterdam, 1951.
27. *Robinson A.* Non-Standard Analysis. Amsterdam, 1966.
28. *Cohen P.J.* Set theory and the continuum hypothesis. N. Y., 1966.
29. *Quine W.V.O.* From logical point of view. N. Y., 1953.
30. *Патнэм Х.* Философия логики // Патнэм Х. Философия сознания / пер. с англ. Л.Б. Макеевой, О.А. Назаровой, А.Л. Никифорова. М., 1999. С. 103-145.
31. *Гудмен Н., Куайн У.* На пути к конструктивному номинализму // Гудмен Н. Способы создания миров / пер. с англ. А.Л. Никифорова, Е.Е. Ледникова, М.В. Лебедева, Т.А. Дмитриева. М., 2001. С. 289-317.
32. *Кант И.* Критика чистого разума. М., 1994.
33. *Brouwer L.E.J.* Intuitionism and formalism // Benacerraf P., Putnam H. Philosophy of mathematics: selected readings. Englewood Cliffs; New Jersey, 1964. P. 81-96.
34. *Гейтинг А.* Интуиционизм / пер. с англ. В.А. Янкова. М., 1965.
35. *Bishop E.* Foundations of constructive analysis. N. Y., 1967.
36. *Yessenin-Volpin A.S.* The Ultra-Intuitionist criticism and the antitraditional program for the foundations of mathematics // Intuitionism and proof theory / ed. by A. Kino, J. Myhill, A. Vesley. Amsterdam, 1980.
37. *Kalmar L.* Foundations of mathematics – Whither now? // Problems in the philosophy of mathematics / ed. by I. Lakatos. Amsterdam, 1967.
38. *Dummett M.* The elements of intuitionism. Oxford, 1977.

---

1. *Svetlov V.A.* Filosofiya matematiki: Osnovnye programmy obosnovaniya matematiki XX stoletiya. M., 2010.
2. *Lakatos I.* Beskonechnyy regress i osnovaniya matematiki // Sovremennaya filosofiya nauki: znanie, ratsional'nost', tsennosti v trudakh mysliteley Zapada: uchebnaya khrestomatiya. M., 1996. S. 106-135.
3. *Lakatos I.* Dokazatel'stva i oproverzheniya. Kak dokazyvayutsya teoremy / per. s angl. I.N. Veselovskogo. M., 1967.
4. *Lolli G.* Filosofiya matematiki: nasledie dvadtsatogo stoletiya / per. s ital. A.L. Sochkova, S.M. Antakova, pod red. Ya.D. Sergeeva. N. Novgorod, 2012.
5. Sovremennaya filosofiya nauki: znanie, ratsional'nost', tsennosti v trudakh mysliteley Zapada: uchebnaya khrestomatiya. M., 1996.
6. *Haack S.* Epistemology with a Knowing Subject // The Review of Metaphysics. 1979. Vol. 33. № 2.
7. *O'Hear A.* Fallibilism // A Companion to Epistemology / eds. J. Dancy, E. Sosa. Oxford, 1992.
8. *Ernest P.* Social constructivism as a philosophy of mathematics. Albany, 1998.
9. *Passmor Dzh.* Sto let filosofii: per. s angl. M., 1998.
10. *James W.* Essays in Radical Empiricism. Lincoln (Nebraska), 1996.
11. *Confrey J.* Conceptual Change Analysis: Implications for Mathematics and Curriculum // Curriculum Inquiry. 1981. Vol. 11 (5). P. 243-257.
12. *Harre R., Krausz M.* Varieties of Relativism. Oxford, 1996.
13. *Kitcher P.* The nature of mathematical knowledge. Oxford, 1984.
14. *Lektorskiy V.A.* Epistemologiya klassicheskaya i neklassicheskaya. M., 2001.
15. *Alston W.P.* Foundationalism // A Companion to Epistemology / eds. J. Dancy, E. Sosa. Oxford, 1992.
16. History and Philosophy of Modern Mathematics / eds. W. Aspray, Ph. Kither. Minneapolis, 1988.
17. *Frege G.* Osnovopolozheniya arifmetiki: logiko-matematicheskoe issledovanie o ponyatii chisla: per. s nem. Tomsk, 2000.
18. *Ayer A.Dzh.* Yazyk, istina i logika. M., 2010.
19. *Rassel B.* Vvedenie v matematicheskuyu filosofiyu. Izbrannye raboty / per. s angl.

V.V. Tselishcheva, V.A. Surovtseva. Novosibirsk, 2007.
20. *Karri Kh.B.* Osnovaniya matematicheskoy logiki. M., 1969.
21. *Benatserraf P.* Frege: posledniy logitsist // Logika, ontologiya, yazyk. Tomsk, 2006.
22. *Berkli Dzh.* Traktat o printsipakh chelovecheskogo znaniya // Berkli Dzh. Sochineniya. M., 1978. S. 152-247.
23. *Gil'bert D.* O beskonechnom // Gil'bert D. Osnovaniya geometrii. Moskva; Leningrad, 1948.
24. *Neumann J. von.* The formalist foundations of mathematics // Benacerraf P., Putnam H. Philosophy of mathematics: selected readings. Englewood Cliffs; New Jersey, 1964.
25. *Karri Kh.B.* Osnovaniya matematicheskoy logiki. M., 1969.
26. *Curry H.B.* Outlines of formalist philosophy of mathematics. Amsterdam, 1951.
27. *Robinson A.* Non-Standard Analysis. Amsterdam, 1966.
28. *Cohen P.J.* Set theory and the continuum hypothesis. N. Y., 1966.
29. *Quine W.V.O.* From logical point of view. N. Y., 1953.
30. *Patnem Kh.* Filosofiya logiki // Patnem Kh. Filosofiya soznaniya / per. s angl. L.B. Makeevoy, O.A. Nazarovoy, A.L. Nikiforova. M., 1999. S. 103-145.
31. *Gudmen N., Kuayn U.* Na puti k konstruktivnomu nominalizmu // Gudmen N. Sposoby sozdaniya mirov / per. s angl. A.L. Nikiforova, E.E. Lednikova, M.V. Lebedeva, T.A. Dmitrieva. M., 2001. S. 289-317.
32. *Kant I.* Kritika chistogo razuma. M., 1994.
33. *Brouwer L.E.J.* Intuitionism and formalism // Benacerraf P., Putnam H. Philosophy of mathematics: selected readings. Englewood Cliffs; New Jersey, 1964. P. 81-96.
34. *Geyting A.* Intuitsionizm / per. s angl. V.A. Yankova. M., 1965.
35. *Bishop E.* Foundations of constructive analysis. N. Y., 1967.
36. *Yessenin-Volpin A.S.* The Ultra-Intuitionist criticism and the antitraditional program for the foundations of mathematics // Intuitionism and proof theory / ed. by A. Kino, J. Myhill, A. Vesley. Amsterdam, 1980.
37. *Kalmar L.* Foundations of mathematics – Whither now? // Problems in the philosophy of mathematics / ed. by I. Lakatos. Amsterdam, 1967.
38. *Dummett M.* The elements of intuitionism. Oxford, 1977.

Поступила в редакцию 1.07.2014 г.

UDC 1:001; 001.8

PHILOSOPHICAL PROBLEM OF PROVING OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE: FROM ABSOLUTISM TO FALLIBILISM

Nikolay Vladimirovich MEDVEDEV, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Philosophy, Professor, Head of Philosophy Department, e-mail: philosophy.tsu@mail.ru

Evgeniya Evgenyevna MEDVEDEVA, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Post-graduate Student, Philosophy Department, e-mail: philosophy.tsu@mail.ru

It is criticized that the dominant in philosophy of mathematics in the absolutist notion that any mathematical truth is completely justified, and therefore infallible, and mathematics is perhaps the only form of undeniable, objective knowledge. This theoretical position is correlated with the opposite fallibilist point of view. For the latter is characterized by the belief that mathematical truth is subject to change and should not be regarded as irreparably verification procedures and/or corrections. Absolutist approach to mathematical knowledge has been challenged in the early 20th century, after the identified logical paradoxes and contradictions in Cantor's set theory and logical-mathematical system of Frege. The data obtained have had serious consequences for the absolutist conception of mathematical knowledge. The conviction that the antinomies are found due to the presence of errors in the very foundations of mathematics is considered. The crisis has resulted in the development of several areas of philosophy of mathematics, whose objectives are to study mathematics and the restoration of its status as an absolutely reliable science. Three major programs the foundations of mathematics – logicism, formalism and constructivism (closely related to intuitionism) – are considered. In each of the programs established that it ensures a solid foundation of absolute truth: the axioms of logic (logicism); intuitively valid principles of meta-mathematics (formalism); intuitively self-evident axioms and rules (intuitionism). The programs reviewed justification of mathematical knowledge using deductive logic to demonstrate the truth of mathematical theorems. However, none of the programs are not able to establish the absolute validity of mathematical truth. With the accumulation of knowledge about the basics of mathematics became clear that the absolutist view is just an idealization, more myth than reality. Experience in understanding the problem of justification of mathematical knowledge in the 20th century brings us to the conclusion that an absolutist approach, typical of traditional mathematics, is generated as a result of the idealization of nature mathematical truth. Mathematicians and philosophers, coming from the Platonic idea of the immutability, reliability and absolute nature of mathematical knowledge, paying little attention to the history of mathematics and the actual mathematical practice. Therefore, the position of fallibilism should be considered as a realistic view of mathematical knowledge and mathematical activities.

Key words: philosophy of mathematics; foundation of mathematical knowledge; absolutes-Semitism; fallibilism; naturalism; empiricism; formalism; intuitionism; constructivism.