

ПОЧТИ РЕАЛИЗАЦИЯ И РЕАЛИЗАЦИЯ РАССТОЯНИЯ ДО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВОМ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

© О.В. Филиппова

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; априорная ограниченность; выпуклость по переключению.

На множестве обобщенных решений задачи Коши введено понятие почти реализации (реализации) производными решений расстояния от произвольной суммируемой функции до значений многозначного отображения на обобщенных решениях (в дальнейшем это свойство называется "почти реализацией (реализацией) расстояния до заданной функции множеством обобщенных решений" (см. определение 2 и рис. 1)). Доказано, что если множество всех локальных обобщенных решений рассматриваемой задачи априорно ограничено, то множество обобщенных решений почти реализует расстояние до любой суммируемой функции. Если же правая часть рассматриваемого включения выпуклозначна, то существует обобщенное решение, производная которого реализует в пространстве суммируемых функций расстояние от любой суммируемой функции до значения многозначного отображения на обобщенном решении.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n -мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\rho_{\mathbf{X}}[x; U]$ – расстояние от точки $x \in \mathbf{X}$ до множества $U \subset \mathbf{X}$ в метрическом пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}^+[U_1; U] \equiv \sup_{x \in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x, U]$ – полутклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_X[U_1; U] = \max\{h^+[U_1; U]; h^+[U; U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$; μ – мера Лебега; $\mathcal{U} \subset [a, b]$ – измеримое множество $\mu(\mathcal{U}) > 0$; $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)| ds$; $Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ – множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$; $\text{Sw}(\mathbf{L}^n[a, b])$ – множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$; $\Omega(Q(\mathbf{L}^n[a, b]))$ – множество всех выпуклых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Пусть $t_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, m$, ($a < t_1 < \dots < t_m < b$) – конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ множество всех непрерывных на каждом из промежутков $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, b]$ ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$.

Рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$\dot{x} \in \Phi(x); \quad (1)$$

$$\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$x(a) = x_0, \quad (3)$$

где отображение $\Phi : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ удовлетворяет условию: для каждого ограниченного множества $U \subset \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ образ $\Phi(U)$ ограничен суммируемой функцией и найдется

такое непрерывное и симметричное отображение $P : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \times \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_+^1[a, b]$, что для любых $x, y \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется оценка

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leq \|P(x, y)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}.$$

Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, m$, непрерывны, $\Delta x(t_k) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$. Выпуклой по переключению оболочкой $sw\Phi$ множества Φ , называется совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y = \chi(\mathcal{U}_1)x_1 + \chi(\mathcal{U}_2)x_2 + \dots + \chi(\mathcal{U}_m)x_m$$

элементов $x_i \in \Phi$, $i = 1, 2, \dots, m$, где m – любое натуральное число, а произвольные измеримые множества $\mathcal{U}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ являются разбиением отрезка $[a, b]$, т. е. $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i = [a, b]$. Пусть далее, $\overline{sw}\Phi$ – замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Под **обобщенным решением задачи** (1)–(3) понимается функция $x \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, для которой существует такое $q \in \overline{sw}\Phi(x)$, что при всех $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \Delta(x(t_k))\chi_{(t_k, b]}(t), \quad (4)$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяют равенствам (2).

Данное определение обобщенного решения отличается от определения обобщенного решения, введенного А.Ф. Филипповым для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью (см. [1]), т. к. оно определяется с помощью выпуклой по переключению оболочки множества значений многозначного отображения $\Phi : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow Q(\mathbf{L}^n[a, b])$, которое, вообще говоря, не обладает свойством выпуклости по переключению значений. При этом если образ $\Phi(x)$ является выпуклым по переключению, то $\overline{sw}\Phi(x) = \Phi(x)$, и поэтому обобщенное решение совпадает с классическим решением.

Будем говорить, что оператор Φ *вольтерров по А.Н. Тихонову* (см. [2]) (или *вольтерров*), если из условия $x|_\tau = y|_\tau$, $\tau \in (a, b)$, следует равенство $(\Phi(x))|_\tau = (\Phi(y))|_\tau$, где $z|_\tau$ – сужение функции $z \in \mathbf{C}^n[a, b]$ на отрезок $[a, \tau]$, а $(\Phi(z))|_\tau$ – множество сужений функций из множества $\Phi(z)$ на отрезок $[a, \tau]$.

Далее предположим, что оператор $\Phi : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ (правая часть включения (1)) вольтерров.

Пусть $\tau \in (a, b]$. Определим непрерывное отображение $V_\tau : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau] \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ равенством:

$$(V_\tau(x))(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in [a, \tau]; \\ x(\tau), & \text{если } t \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $x \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$ является *обобщенным решением задачи* (1)–(3) *на отрезке* $[a, \tau]$, $\tau \in (a, b]$, если существует такое $q \in (\overline{sw}\Phi(V_\tau(x)))|_\tau$, что функция $x : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k: t_k \in [a, \tau]} \Delta(x(t_k))\chi_{(t_k, b]}(t), \quad (5)$$

где $\Delta(x(t_k))$ ($k : t_k \in [a, \tau]$) удовлетворяют равенствам (2).

Множество всех обобщенных решений на отрезке $[a, \tau]$ обозначим $H(x_0, \tau)$, а $H(x_0, b)|_{[a, \tau]}$ – множество сужений на отрезок $[a, \tau]$ всех функций из $H(x_0, b)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что множество всех локальных обобщенных решений задачи (1)–(3) *априорно ограничено*, если найдется такое число $r > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует обобщенного решения $y \in H(x_0, \tau)$, для которого выполняется неравенство $\|y\|_{\tilde{C}^n[a, \tau]} > r$.

Т е о р е м а 1. Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи (1)–(3) априорно ограничено. Тогда для любого $\tau \in (a, b]$ множество $H(x_0, \tau) \neq \emptyset$, и существует такое $r > 0$, что для каждого $\tau \in (a, b]$, $y \in H(x_0, \tau)$ выполняется неравенство $\|y\|_{\tilde{C}^n[a, \tau]} \leq r$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (1)–(3) *почти реализует производными решений расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до значений многозначного отображения на обобщенных решениях задачи (1)–(3)*, если для любого $v \in \mathbf{L}^n[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое обобщенное решение $x \in \tilde{C}^n[a, b]$ задачи (1)–(3), что для любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется неравенство:

$$\|q - v\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leq \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v, \overline{sw}\Phi(x)] + \varepsilon\mu(\mathcal{U}), \quad (6)$$

где функция $q \in \overline{sw}\Phi(x)$ удовлетворяет равенству (4). Если неравенство (6) выполняется и при $\varepsilon = 0$, то будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (1)–(3) *реализует производными решений расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до значения многозначного отображения на обобщенных решениях*.

В дальнейшем это свойство коротко будем называть почти реализацией и реализацией расстояния до заданной функции множеством обобщенных решений.

Замечание. Отметим, что задача о реализации или почти реализации продиктована многозначностью правой части включения (1). Для уравнения такой задачи не возникает, поскольку для любого решения уравнения его производная реализует расстояние от суммируемой функции до значения правой части уравнения на решении. Для уравнений на этом свойстве с помощью дифференциальных неравенств получены многочисленные оценки решений уравнений.

Геометрически определение 2 можно условно проиллюстрировать следующим образом (рис. 1).

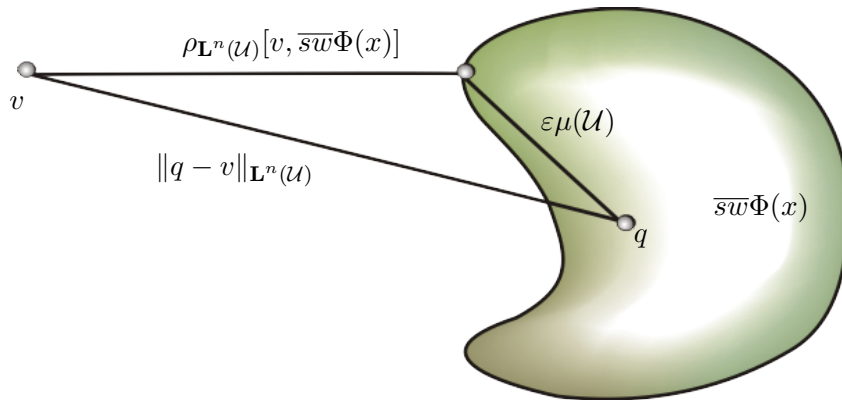


Рис. 1. Почти реализация расстояния.

Т е о р е м а 2. Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи (1)–(3) априорно ограничено. Тогда множество обобщенных решений задачи (1)–(3) *почти реализует производными решений расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до значений многозначного отображения на обобщенных решениях*. Если $\Phi : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \Omega(Q(\mathbf{L}^n[a, b]))$, то множество обобщенных решений задачи (1)–(3) *реализует расстояние до любой суммируемой функции*.

В дальнейшем для импульсных функционально-дифференциальных включений с правой частью, необладающей свойством выпуклости по переключению значений, с помощью свойства почти реализации и реализации расстояния множеством обобщенных решений до заданной функции и с помощью дифференциальных и интегральных неравенств будут получены оценки обобщенных решений, из которых вытекают оценки В.И. Благодатских, М.И. Каменского, В.В. Обуховского, Е.С. Половинкина, А.А. Толстоногова, А.Ф. Филиппова, И.А. Финогенко, П.И. Чугунова (см., например, [3], [4], [5]).

Список литературы

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. *Тихонов А.Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюллетень Московского университета. Секция А. 1938. Т. 1. № 8. С. 1-25.
3. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части 1-6 // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275-1313.
4. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
5. *Чугунов П.И.* Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы // Прикл. математика и пакеты прикл. программ. Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР, 1980. С. 155-179.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00645) и Мин. обр. науки РФ (проект № 1.1877.2011).

Поступила в редакцию 13 мая 2013 г.

Filippova O.V. THE NEARLY REALIZATION AND REALIZATION OF DISTANCE BY THE SET OF GENERALIZED SOLUTIONS UP TO GIVEN FUNCTION.

Notion of the nearly realization and realization by derivatives of solutions of distance from a arbitrary summarized function to value of mapping (this property we will invited "the nearly realization and realization of distance by the set of generalized solutions up to given function" is formulated. If the set of generalized solutions are a-priori boundedness, then the set of generalize solutions are nearly realized of distance to a arbitrary summarize function. If the right-hand side of inclusion is convex, then the set of generalized solutions are realized of distance to a arbitrary summarized function.

Key words: functional-differential inclusion; a-priori boundedness; convex-valued with respect to switching.