Интересно явное выражение $\Phi_k$ через корни производных $f^{(n-k-1)}(x)$.

Пусть $x_1, \ldots x_{k+1}$ — корни многочлена $f^{(n-k-1)}(x)$. Тогда инварианты $\Phi_k$ выражаются следующим образом:

$$\Phi_k = (-1)^{k+1} a_n^{\frac{k+1}{n-1}} \left(\frac{n}{k+1}\right)^{k+1} \binom{n}{k+1} \prod_{i=1}^{k+1} \sum_{\substack{\gamma=1,\\ \gamma\neq i}}^{k+1} (x_\gamma - x_i), \quad k < n-1$$

$$\Phi_{n-1} = (-1)^n a_n^{\frac{n}{n-1}} \prod_{i=1}^{n} \sum_{\gamma=1,\gamma\neq i}^{n} (x_\gamma - x_i) - n^{n-1} a_n^{\frac{1}{n-1}} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Малашонок Наталия Александровна
Тамбовский государственный ун-т
Россия, Тамбов
e-mail: nmalaschonok@narod.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

# НЕПРЕРЫВНЫЙ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИЙ МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© В. Г. Малинов

**1.** В приложениях методов оптимизации актуальны математические модели, формализующиеся к задаче равновесного программирования [1] : найти точку $\mathbf{v}^*$ из условий

$$\mathbf{v}^* \in Q,\ \Phi(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^*) \leqslant \Phi(\mathbf{v}^*, \mathbf{w}) \quad \forall\ \mathbf{w} \in Q \tag{1}$$

где функция $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ определена на произведении евклидовых пространств $E^n \times E^n$; $Q \in E^n$ — заданное выпуклое замкнутое допустимое множество. Многие важные проблемы исследования операций, например (см. [1] – [4]), теории игр, вычислительной математики, математической экономики, сводятся к задаче вида (1). К ней можно свести и экономико-математическую модель взаимодействия нескольких участников с совокупной стратегией $\mathbf{w} \in Q$ и целевой функцией затрат $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, в которой первая переменная играет роль параметра, а вторая $\mathbf{w} \in Q$ — переменной оптимизации. Задача (1) описывает ситуацию равновесия, при которой всем участникам невыгодно уклоняться от точки равновесия $\mathbf{v}^* \in V_* \subset Q$, иначе значение функции $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ увеличится; если эта функция не зависит от $\mathbf{v}$, то задача (1) превращается в обычную задачу оптимизации. Далее предполагаем, что множество точек равновесия $V_* \neq \emptyset$.

**2.** Рассмотрим численные методы решения задачи. В работе [2] для задачи минимизации гладкой выпуклой функции $J(\mathbf{u})$ на выпуклом замкнутом множестве $Q$ был предложен и исследован метод, описываемый задачей Коши для векторного дифференциального уравнения

$$\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = \pi_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x}(t))}\left[\mathbf{x}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}(t))\mathbf{J}'(\mathbf{x}(t))\right],$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad t \geqslant 0,$$

где $\pi_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x}(t))}[\mathbf{v}(t)]$ есть $\mathbf{G}$-проекция вектора $\mathbf{v}$ на множество $Q$ в метрике, задаваемой скалярным произведением $(\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})$; $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ $\forall$ $\mathbf{x}$ есть симметричная положительно определённая матрица; $\mathbf{w} = \pi_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x}(t))}[\mathbf{v}(t)] \in Q$ есть решение квадратичной задачи минимизации сильно выпуклой функции $g(\mathbf{y}) = (\mathbf{G}(\mathbf{w})(\mathbf{y}-\mathbf{v}), \mathbf{y}-\mathbf{v})/2 \to \inf, \quad \mathbf{y} \in Q$. Этот метод в работе [3] обобщен для решения равновесной задачи (1). В работе [4] предложен непрерывный метод второго порядка для решения задачи (1) с обращенным оператором метрики при второй производной, доказана сходимость метода. Здесь далее наряду с $\mathbf{G}$-проекцией будем пользоваться проекцией $\mathbf{w} = \pi_Q[\mathbf{v}(t)] \in Q$ вектора $\mathbf{v} \in E^n$ в точке $\mathbf{x} \in E^n$ в метрике, порождённой обычной нормой $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ пространства $E^n$; эта проекция существует и единственна. Для решения задачи (1) рассмотрим непрерывный квазиньютоновский проекционный метод второго порядка на основе процесса

$$\begin{gathered}\alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = \\ \pi_Q\left[\mathbf{x}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}(t))\nabla_w\Phi(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t))\right], \\ \mathbf{u}(t) = \pi_Q\left[\mathbf{x}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}(t))\nabla_w\Phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t))\right], \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \qquad \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1, \quad t \geqslant 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1$ — любые фиксированные точки из $E^n$; $\quad \nabla_w\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ — градиент функции $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ по переменной $\mathbf{w}$; $\mathbf{G}(\mathbf{v}(t))$ $\forall$ $\mathbf{v}(t)$ есть заданная симметричная положительно определённая матрица; $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $> 0$ — параметры метода. Предполагаем существование и единственность решения системы (2) при $t \geqslant 0$. Отметим, для предлагаемого нового метода второго порядка решения задачи (1), от предложенного и исследованного в [4], есть следующие существенные отличия: 1) при второй производной в левой части отсутствует обращённый оператор переменной метрики; 2) в правых частях в (2) используется оператор проектирования $\pi_Q[\mathbf{v}(t)]$ вектора $\mathbf{v} \in E^n$ в исходной метрике пространства, а с помощью оператора переменной метрики строится проектируемый вектор направления поиска; 3) в доказательстве сходимости метода используется факт изоморфности евклидовых пространств, порождаемых различными скалярными произведениями. В докладе обсуждается сходимость траектории $\mathbf{x}(t)$ метода (2) к решению задачи (1).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Антипин А.С.* О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений // ЖВМиМФ. 1995. Т. 35, № 5. С. 688–704.
2. *Антипин А.С., Васильев Ф.П.* О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12(403). С. 3–9.
3. *Антипин А.С., Будак Б.А., Васильев Ф.П.* Непрерывный экстраградиентный метод первого порядка с переменной метрикой для решения задач равновесного программирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2003. № 1. С. 37–41.

4. *Будак Б.А.* Непрерывный экстраградиентный метод второго порядка с переменной метрикой для решения задач равновесного программирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2003. № 2. С. 27–32.

Малинов Валериан Григорьевич
Ульяновский государственный ун-т
Россия, Ульяновск
e-mail: vgmalinov@mail.ru

Поступила в редакцию 12 апреля 2007 г.

# РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

© **О. А. Малыгина**

Совершенствование процесса обучения высшей математике может быть осуществлено на основе использования идей системно-деятельностного подхода. Экспериментальная модель курса высшей математики для технических вузов, разрабатываемая автором, опирается на ряд дидактических принципов. К ним относятся принцип системного построения содержания учебного предмета, принцип описания курса в единстве общего, особенного и единичного, принцип органического соединения высшей математики с профессиональной составляющей обучения. Используются принципы предметной деятельности, развивающего обучения и принцип единства основ подготовки педагога и ученика по экспериментальной программе с учетом особенностей каждого субъекта процесса.

Рассмотрим реализацию в экспериментальной модели курса высшей математике принципа развивающего обучения, который выражает установку обучения на развитие учащегося, его интеллектуальных способностей. Принцип определяет формирование нового способа организации познавательной деятельности обучаемого в процессе изучения математики. Основой приобретения студентом знаний и умений является его познавательная деятельность (принцип предметной деятельности). Поэтому развитие учащегося оценивается с точки зрения вносимых посредством экспериментального обучения изменений (приращений) в эту деятельность. В предлагаемой методике обучения приращения касаются и предмета и метода деятельности. Математические объекты раскрываются в своей системной организации (принцип системного построения содержания учебного предмета). Новыми способами познания для обучаемых выступают не только математические методы, но и общенаучные методы: метод системного анализа, метод математического моделирования, связанный с системным исследованием объекта-оригинала и его математической модели и метод синтеза. Освоение нового способа деятельности — с системным типом ориентировки в объектах