УДК 517

О СТРУКТУРЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ *n*-ГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© В.И. Фомин

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, банахово пространство, общее решение.

Представлена структура общего решения уравнения $u^{(n)}(t)+A_1(t)u^{(n-1)}(t)+\ldots+A_{n-1}(t)u'(t)+A_n(t)u(t)=$ $=f(t), 0\le t<\infty$, где $A_i(t)\in C([0,\infty);L(E)), 1\le i\le n, C([0,\infty);$ $L(E))$ – множество непрерывных функций, действующих из $[0,\infty)$ в $L(E); L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве E; $f(t)\in C([0,\infty);E)$.

В банаховом пространстве E изучается уравнение

$$u^{(n)}(t)+A_1(t)u^{(n-1)}(t)+\ldots+A_{n-1}(t)u'(t)+A_n(t)u(t)= =f(t), 0\le t<\infty, \tag{1}$$

где

$$A_i(t)\in C\big([0,\infty);L(E)\big), 1\le i\le n; C\big([0,\infty);L(E)\big)$$

– множество непрерывных функций, действующих из $[0,\infty)$ в $L(E)$, $L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в E; $f(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$.

Рассмотрим для (1) соответствующее однородное уравнение

$$u^{(n)}(t)+A_1(t)u^{(n-1)}(t)+\ldots+A_{n-1}(t)u'(t)+A_n(t)u(t)= =0, 0\le t<\infty. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно записать в виде $Lu=0$, где $L:C^n\big([0,\infty);E\big)\to C\big([0,\infty);E\big)$, для любой функции $v\in C^n\big([0,\infty);E\big)$ имеем, по определению,

$$\big(Lv\big)(t)=v^{(n)}(t)+A_1(t)v^{(n-1)}(t)+\ldots+A_{n-1}(t)v'(t)+A_n(t)v(t)\cdot$$

В силу линейности операторов $A_i(t), 1\le i\le n, 0\le t<\infty$, дифференциальный оператор L является линейным.

Определение 1. Сопутствующим операторным уравнением (СОУ) уравнения (2) называется уравнение вида

$$F^{(n)}(t)+A_1(t)F^{(n-1)}(t)+\ldots+A_{n-1}(t)F'(t)+A_n(t)F(t)= =\Theta, 0\le t<\infty, \tag{3}$$

рассматриваемое относительно искомой функции $F(t)\in C^n\big([0,\infty);L(E)\big)$ (здесь Θ – нулевой оператор).

Замечание 1. Если $F_*(t)$ – решение уравнения (3), то при любом фиксированном $\tilde{x}\in E$ функция $\tilde{u}_*(t)=F_*(t)\tilde{x}$ является решением уравнения (2).

Действительно, с учетом того, что $\tilde{u}_*^{(m)}(t)=F_*^{(m)}(t)\tilde{x}, 1\le m\le n$, получаем

$$\big(L\tilde{u}_*\big)(t)=F_*^{(n)}(t)\tilde{x}+A_1(t)F_*^{(n-1)}(t)\tilde{x}+\ldots+A_{n-1}(t)F_*'(t)\tilde{x}+$$

$$+A_n(t)F_*(t)\tilde{x}=[F_*^{(n)}(t)+A_1(t)F_*^{(n-1)}(t)+$$

$$\ldots+A_{n-1}(t)F_*'(t)+A_n(t)F_*(t)]\,\tilde{x}=\Theta\,\tilde{x}=0\,.$$

Определение 2. Набор решений $F_1(t),F_2(t),\ldots,F_n(t)$ уравнения (3) называется фундаментальной системой образующих (ФСО) общего решения уравнения (2), если n-параметрическое семейство функций

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}F_j(t)\,x_j\right\},$$

где x_j - параметры, $x_j\in E\,(1\le j\le n)$, является общим решением уравнения (2).

Теорема 1. Пусть уравнение (3) имеет n решений

$$F_1(t),\quad F_2(t),\quad \ldots,\quad F_n(t), \tag{4}$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$F_i^{(p)}(0)F_j^{(q)}(0)=F_j^{(q)}(0)F_i^{(p)}(0)\,;\forall 1\le i,j\le n; 0\le p,q\le n-1, \tag{5}$$

(по определению $F_k^{(0)}(0)=F_k(0), 1\le k\le n$);

$$\exists\ \big[W(0)\big]^{-1}\in L(E), \tag{6}$$

где $W(0)$ – операторный определитель Вронского решений (4) в точке $t=0$. Тогда совокупность решений (4) является ФСО общего решения уравнения (2), т. е. общее решение уравнения (2) имеет вид

$$u_{0.0}(t)=\sum_{j=1}^{n}F_j(t)x_j\,, \tag{7}$$

где $x_j (1\le j\le n)$ – произвольные элементы из E.

Доказательство. По определению общего решения уравнения (см. [1]) формула (7) будет задавать общее решение уравнения (2), если

1) для любых конкретных значений параметров $x_1,x_2,...,x_n\in E$ функция вида (7) является решением уравнения (2) (это условие выполняется в силу замечания 1 и аддитивности оператора L);

2) при любом фиксированном наборе начальных значений $u_0,u_0',...,u_0^{(n-1)}\in E$ решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными условиями

$$u(0)=u_0,u'(0)=u_0',\ldots,u^{(n-1)}(0)=u_0^{(n-1)} \tag{8}$$

принадлежит семейству решений (7).

С учетом того, что

$$u_{0.0}^{(m)}(t)=\sum_{j=1}^{n}F_j^{(m)}(t)x_j,1\le m\le n-1,$$

начальные условия (8) принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n}F_j^{(m)}(0)x_j=u_0^{(m)},0\le m\le n-1, \tag{9}$$

(по определению, $u_0^{(0)}=u_0$, $u_0^{(1)}=u_0'$). Операторный определитель системы (9) имеет вид

$$\Delta=\begin{vmatrix} F_1(0) & F_2(0) & ... & F_n(0)\\ F_1'(0) & F_2'(0) & ... & F_n'(0)\\ \dots & & & \\ F_1^{(n-1)}(0) & F_2^{(n-1)}(0) & ... & F_n^{(n-1)}(0)\end{vmatrix},$$

т .е. $\Delta=W(0)$ (оператор Δ определяется однозначно в силу условия (5); понятие операторного определителя см. в [1]). В силу условия (6) применимо операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве [1], согласно которому система (9) имеет единственное решение

$$x_j=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{kj}\left[W(0)\right]^{-1}u_0^{(k-1)},1\le j\le n, \tag{10}$$

где A_{kj} – операторное алгебраическое дополнение элемента определителя $W(0)$, записанного в k-й строке и j-ом столбце ($1\le k,\ j\le n$).

Итак, решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными условиями (8) имеет вид (7) при значениях параметров $x_1,x_2,...,x_n$, задаваемых формулой (10). Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Следуя стандартной терминологии, выражение в правой части (7) можно назвать линейной комбинацией операторных функций $F_1(t),F_2(t),\ldots,F_n(t)$ с векторными коэффициентами $x_1,x_2,...,x_n$.

Замечание 3. Уравнение (2) и СОУ уравнения (2) различаются между собой не только природой неизвестной величины (в уравнении (2) в качестве искомой величины выступает функция $u(t)\in C^n\left([0,\infty);E\right)$, в СОУ уравнения (2) – функция $F(t)\in C^n\left([0,\infty);L(E)\right)$), но и характером вхождения неизвестной величины в уравнение (при фиксированном $t\in[0,\infty)$ каждое слагаемое в уравнении (2) есть значение соответствующего оператора из $L(E)$ на соответствующем векторе из E (для первого слагаемого в качестве такого оператора выступает единичный оператор), а в СОУ уравнения (2) каждое слагаемое представляет собой произведение соответствующих операторов в банаховой алгебре $L(E)$).

Замечание 4. В скалярном случае ($E=R^1$) СОУ уравнения (2) идентично уравнению (2) и ФСО общего решения уравнения (2) трансформируется в фундаментальную систему решений уравнения (2).

Замечание 5. Для существования ФСО общего решения уравнения (2) достаточно разрешимости n задач Коши для уравнения (3) с начальными условиями вида

$$F^{(k)}(0)=\mathrm{I},F^{(i)}(0)=\Theta,\forall\,0\le i\le n-1,i\ne k\,;k=0,1,2,...,n-1, \tag{11}$$

где I и Θ – соответственно единичный и нулевой операторы.

Действительно, набор решений

$$\{F_k(t)\}_{k=0}^{n-1} \tag{12}$$

таких задач Коши является ФСО общего решения уравнения (2), ибо в силу (11) определитель Вронского решений (12) в точке $t = 0$ есть единичный операторный определитель (т.е. операторный определитель, у которого каждый элемент главной диагонали равен единичному оператору, а остальные элементы равны нулевому оператору), следовательно, выполняются условия (5), (6) теоремы 1, так как $\mathrm{I}\Theta=\Theta\mathrm{I}$ и единичный операторный определитель равен единичному оператору: $W(0)=\mathrm{I}$, следовательно, существует $[W(0)]^{-1}=\mathrm{I}\in L(E)$.

В случае, когда операторные коэффициенты уравнения (2) постоянны:

$$u^{(n)}(t)+A_1u^{(n-1)}(t)+...+A_{n-1}u'(t)+A_nu(t)=0,0\le t<\infty\,, \tag{13}$$

ФСО общего решения такого уравнения построена в [1], [2]: если характеристический операторный многочлен

$$P(\Lambda)=\Lambda^n+A_1\Lambda^{n-1}+...+A_{n-1}\Lambda+A_n$$

уравнения (13) имеет p корней

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_p \in L(E)$$

с кратностями соответственно

$$r_1, r_2, \dots, r_p \ \left(p \le n, r_1 + r_2 + \dots + r_p = n\right),$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$A_k \Lambda_i = \Lambda_i A_k, \forall 1 \le k \le n, 1 \le i \le p;$$

$$\Lambda_i \Lambda_j = \Lambda_j \Lambda_i, \forall 1 \le i, j \le p; \exists \left(\Lambda_i - \Lambda_j\right)^{-1} \in L(E),$$

$$\forall 1 \le j < i \le p,$$

то система операторных функций

$$\left\{\left\{t^{k-1} e^{\Lambda_s t}\right\}_{k=1}^{r_s}\right\}_{s=1}^{p}$$

является ФСО общего решения уравнения (13).

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $u_*(t)$ – частное решение уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(t) = u_{0.0}(t) + u_*(t), \tag{14}$$

где $u_{0.0}(t)$ задается формулой (7).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству соответствующего утверждения из [1].

Т е о р е м а 3. Пусть уравнение (3) имеет n решений вида (4), удовлетворяющих следующим условиям:

$$F_i^{(p)}(t) F_j^{q}(t) = F_j^{(q)}(t) F_i^{(p)}(t), \forall 1 \le i, j \le n; \quad 0 \le p, q \le n-1; 0 \le t < \infty, \tag{15}$$

$$\exists \ [W(t)]^{-1} \in L(E), \forall\, 0 \le t < \infty, \tag{16}$$

где $W(t)$ – операторный определитель Вронского решений (4). Тогда уравнение (1) имеет частное решение вида

$$u_*(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j(t) \int_0^t \mathrm{A}_{nj}(\tau) [W(\tau)]^{-1} f(\tau) d\tau, \tag{17}$$

где $\mathrm{A}_{nj}(\tau)$ – операторное алгебраическое дополнение элемента $F_j^{(n-1)}(\tau)$ определителя $W(\tau)$ $(1 \le j \le n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать $u_*(t)$ методом вариации произвольных постоянных в виде

$$u_*(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j(t) x_j(t), \tag{18}$$

где $x_j(t)$ – неизвестные пока функции. Подберем $x_j(t)$ $\left(1 \le j \le n\right)$ таким образом, чтобы функция (18) была решением уравнения (1). Используя правило дифференцирования композиции операторной и векторной функций [3], получаем

$$u_*'(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j'(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} F_j(t) x_j'(t).$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(t) x_j'(t) = 0.$$

Тогда

$$u_*'(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j'(t) x_j(t),$$

$$u_*''(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j''(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} F_j'(t) x_j'(t).$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} F_j'(t) x_j'(t) = 0.$$

Тогда

$$u_*''(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j''(t) x_j(t),$$

$$u_*'''(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j'''(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} F_j''(t) x_j'(t).$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n} F_j^{(n-2)}(t) x_j'(t) = 0.$$

Тогда

$$u_*^{(n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j^{(n-1)}(t) x_j(t),$$

$$u_*^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j^{(n)}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} F_j^{(n-1)}(t) x_j'(t).$$

Подставляя функцию (18) и найденные выражения для ее производных в левую часть уравнения (1), имеем:

$$(Lu_*)(t) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_j^{(n)}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} F_j^{(n-1)}(t) x_j'(t) + A_1(t) \sum_{j=1}^{n} F_j^{(n-1)}(t) x_j(t) +$$

$$+ .. + A_{n-2}(t) \sum_{j=1}^{n} F_j''(t) x_j(t) +$$

$$+ A_{n-1}(t) \sum_{j=1}^{n} F_j'(t) x_j(t) + A_n(t) \sum_{j=1}^{n} F_j(t) x_j(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} F_j^{(n-1)}(t) x_j'(t) + [F_1^{(n)}(t) + A_1(t) F_1^{(n-1)}(t) + \dots +$$

$$+A_{n-2}(t)F_1''(t)+A_{n-2}(t)F_1'(t)+A_n(t)F_1(t)]x_1(t)+[F_2^{(n)}(t)+$$

$$+A_1(t)F_2^{(n-1)}(t)+\ldots+A_{n-2}(t)F_2''(t)+A_{n-1}(t)F_2'(t)+$$

$$+A_n(t)F_2(t)]x_2(t)+\ldots+[F_n^{(n)}(t)+A_1(t)F_n^{(n-1)}(t)+\ldots+$$

$$+A_{n-2}(t)F_n''(t)+A_{n-1}(t)F_n'(t)+A_n(t)F_n(t)]x_n(t)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}F_j^{(n-1)}(t)x_j'(t)+\Theta x_1(t)+\Theta x_2(t)+\ldots+\Theta x_n(t)=\sum_{j=1}^{n}F_j^{(n-1)}(t)x_j'(t),$$

так как $F_1(t),F_2(t),...,F_n(t)$ – решения уравнения (3).

Получили равенство

$$(Lu_*)(t)=\sum_{j=1}^{n}F_j^{(n-1)}(t)x_j'(t)\cdot$$

По условию $(Lu_*)(t)=f(t)$:

$$\sum_{j=1}^{n}F_j^{(n-1)}(t)x_j'(t)=f(t)\cdot$$

Итак, функция вида (18) является решением уравнения (1), если

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}F_j(t)x_j'(t)=0,\\ \sum_{j=1}^{n}F_j'(t)x_j'(t)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum_{j=1}^{n}F_j^{(n-2)}(t)x_j'(t)=0,\\ \sum_{j=1}^{n}F_j^{(n-1)}(t)x_j'(t)=f(t).\end{cases} \qquad (19)$$

Операторный определитель системы (19) имеет вид $\Delta(t)=W(t)$ (оператор $\Delta(t)$ определяется однозначно в силу условия (15)). В силу условия (16) можно применить при каждом $t\in[0,\infty]$ операторно-векторное правило Крамера, согласно которому система (19) имеет единственное решение

$$x_j'(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_{kj}(t)[W(t)]^{-1}b_k, 1\le j\le n,$$

где $\mathrm{A}_{kj}(t)$ – операторное алгебраическое дополнение элемента определителя $W(t)$, записанного в k-й строке и j-ом столбце $(1\le k,\ j\le n), b_k(1\le k\le n)$ – правые части уравнений системы (19). С учетом того, что $b_k=0, 1\le k\le n-1, b_n=f(t)$, получаем

$$x_j'(t)=\mathrm{A}_{nj}(t)[W(t)]^{-1}f(t), 1\le j\le n,$$

откуда

$$x_j(t)=\int_0^t \mathrm{A}_{nj}(\tau)[W(\tau)]^{-1}f(\tau)\,d\tau, 1\le j\le n\cdot \qquad (20)$$

В силу (18), (20) уравнение (1) имеет частное решение вида (17). Теорема 3 доказана.

Заметим, что условия (5), (6) теоремы 1 – это частный случай условий (15), (16) теоремы 3 при $t = 0$.

В силу теорем 1–3 справедлива

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид (14), где $u_{0.0}(t)$ задается формулой (7), а $u_*(t)$ – формулой (17).

Для получения решения задачи Коши (1), (8) достаточно в общем решении уравнения (1) подобрать значения параметров $x_1,x_2,...,x_n$ таким образом, чтобы выполнялись начальные условия (8).

Результаты настоящей работы анонсированы в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин В.И.* Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 656–660.
2. *Фомин В.И.* О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 5. С. 710–713.
3. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980. С. 144.
4. *Фомин В.И.* О структуре общего решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с переменными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Материалы Воронеж. зимней математ. шк. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 2007. С. 230–231.

Поступила в редакцию 20 сентября 2008 г.

Fomin V.I. About general solution's structures of linear differential equation by n-multiplicity with variable limited operational coefficients in the banach space. The general solution's structure of equation was mentioned $u^{(n)}(t)+A_1(t)u^{(n-1)}(t)+\ldots+$ $+A_{n-1}(t)u'(t)+A_n(t)u(t)=f(t), 0\le t<\infty,$ where $A_i(t)\in C([0,\infty);$ $L(E)), 1\le i\le n, C([0,\infty);\ L(E))-$ collection of continuous functions, acting from $[0,\infty)$ to $L(E)$; $L(E)$ – the Banach algebra of limited linear operators, acting in the Banach space E; $f(t)\in C([0,\infty);E)$.

Key words: differential equation, Banach space, general solution.