Abstract: Basic principles of mathematical education of students of economical specialities in WSTU are given.

Keywords: mathematics teaching; taking into account of basic knowledge level; innovation EMC; informational technologies in education.

Можей Наталья Павловна
к. ф.-м. н., доцент
Белорусский государственный
технологический университет
Беларусь, Минск
e-mail: mozhey@bstu.unibel.by

Natalja Mozhey
candidate of phys.-math. sciences, senior lecturer
Whiterussian State
Technological University
Whiterussia, Minsk
e-mail: mozhey@bstu.unibel.by

УДК 517.98

КАНОНИЧЕСКИЕ И ГРАНИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА ФЛАГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАДГРУППЫ[1]

© **В. Ф. Молчанов**

Ключевые слова: симметрические пространства; многообразие флагов; канонические представления; граничные представления; преобразование Березина.

Аннотация: Дается краткое описание новой теории: канонические представления на флаговых многообразиях надгруппы.

Канонические представления на эрмитовых симметрических пространствах G/K были введены Вершиком, Гельфандом и Граевым (для плоскости Лобачевского) и Березиным. Они унитарны относительно некоторого инвариантного скалярного произведения (формы Березина). Мы рассматриваем канонические представления в намного более общей постановке. Во-первых, рассматриваемые многообразия не обязательно транзитивны, открытые орбиты в них – это симметрические пространства, по преимуществу псевдо-римановы. Во-вторых, изучаемые представления не обязательно унитарны (условие унитарности оказывается слишком стеснительным), вместо локального скалярного произведения (ядро скалярного произведения есть дельта-функция) появляется либо нелокальное скалярное произведение, либо инвариантная полуторалинейная форма, не обязательно положительно (отрицательно) определенная. В-третьих, изучаемые представления действуют в различных, подчас весьма широких, пространствах функций или сечений линейных расслоений (в ядерных пространствах, пространствах обобщенных функций и др.).

Наш подход состоит в следующем. Пусть G – полупростая группа Ли. Надгруппа $\widetilde{G}$ для G – это такая группа, что G – ее подгруппа, и эта подгруппа – сферическая, т.е. выделяется из $\widetilde{G}$ некоторой инволюцией. Пусть $\widetilde{P}$ – максимальная параболическая подгруппа группы $\widetilde{G}$, пусть

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП 2.1.1/1474 и Темпланом 1.5.07.

$\widetilde{R}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, – серия представлений группы $\widetilde{G}$, индуцированных характерами (одномерными представлениями) подгруппы $\widetilde{P}$. Представления $\widetilde{R}_\lambda$ могут зависеть еще от некоторых дискретных параметров. Как правило, эти представления неприводимы. Они действуют в функциях на флаговом пространстве $\Omega = \widetilde{G}/\widetilde{P}$ для надгруппы $\widetilde{G}$, это некоторое компактное многообразие.

Ограничения R_λ представлений $\widetilde{R}_\lambda$ на группу G мы называем, используя термин Вершика–Гельфанда–Граева, *каноническими представлениями* группы G. Они действуют в функциях на Ω.

Серия представлений $\widetilde{R}_\lambda$ обладает сплетающим оператором $\widetilde{B}_\lambda$: он сплетает представления со значениями параметра λ и $\lambda^* = N - \lambda$, где N – некоторое число, зависящее от Ω. Композиция этого оператора и инволюции, выделяющей группу G в $\widetilde{G}$, порождает некоторый оператор Q_λ, который играет важную роль во всей теории. Мы называем этот оператор Q_λ *преобразованием Березина*. Он сплетает канонические представления с параметрами λ и λ^* и порождает полуторалинейную форму (форму Березина).

Вообще говоря, многообразие Ω не является однородным пространством группы G, эта группа имеет несколько орбит на Ω. Открытые G-орбиты являются полупростыми симметрическими пространствами G/H_i. Они могут оказаться неизоморфными. Многообразие Ω есть замыкание объединения открытых G-орбит.

Канонические представления R_λ порождают *граничные представления*. Это – представления группы G, связанные с границами открытых G-орбит G/H_i, эти границы состоят из G-орбит меньшей размерности. Граничные представления распадаются на два типа: представления одного типа действуют в обобщенных функциях, сосредоточенных на объединении S границ, представления другого типа действуют в струях, трансверсальных к S (в коэффициентах рядов Тейлора по степеням "расстояния" до границы). Эти два типа двойственны друг другу. Появление граничных представлений связано как раз с широкой трактовкой понятия канонического представления. Граничные представления интересны как сами по себе (вообще, изучение представлений в обобщенных функциях, сосредоточенных на подмногообразиях, – одна из самых "горячих тем"и интригующих задач в некоммутативном гармоническом анализе), так и с точки зрения разложения канонических представлений, они "склеивают" представления на отдельных открытых G-орбитах.

Наряду с указанным понятием канонического представления можно рассматривать несколько другую его версию: ограничение канонических представлений в первом смысле на какую-нибудь одну G-орбиту G/H в Ω. Оба варианта взаимосвязаны и должны быть предметом изучения. Но первый из них приводит к более естественной и прозрачной теории. Например, в первом варианте легко написать оператор, обратный к преобразованию Березина, а во втором – это весьма трудная задача.

Однородные пространства G/H, участвующие в теории, это – *симметрические полупростые пространства*. Такие пространства образуют обширный и крайне важный класс однородных пространств.

Его подкласс, состоящий из *римановых* полупростых симметрических пространств (здесь инвариантная метрика положительно определена), более прост в изучении. При переходе от римановых пространств к *псевдо-римановым* симметрическим пространствам (здесь инвариантная метрика не является знакоопределенной) трудности в изучении гармонического анализа резко возрастают. Поэтому наиболее интересные задачи относятся именно к псевдо-римановым пространствам. Именно их мы по преимуществу и рассматриваем.

Среди всех симметрических полупростых пространств G/H (как римановых, так и псевдоримановых) особую роль играет подкласс *симплектических* симметрических пространств. В частности, на пространствах этого класса строится квантование в смысле Березина. В свою очередь, этот подкласс включает в себя следующие основные подсемейства:

а) эрмитовы симметрические пространства;

б) полукэлеровы симметрические пространства;

в) пара-эрмитовы симметрические пространства;

г) комплексификации эрмитовых симметрических пространств.

Пространства семейства а) – римановы, пространства остальных семейств – псевдо-римановы. Произвольное симплектическое пространство есть прямое произведение пространств из указанных четырех классов.

Помимо симплектических симметрических пространств важный класс образуют гиперболические пространства – вещественные (гиперболоиды), комплексные, кватернионные и октавное. Комплексные гиперболические пространства являются полукэлеровыми симметрическими пространствами.

Основные задачи этой теории – это разложение канонических и граничных представлений на неприводимые составляющие, выражение преобразования Березина через операторы Лапласа, разложение и асимптотическое поведение формы Березина.

В настоящее время конкретные вычисления проведены для следующих случаев:

а) многообразие Ω – единичная сфера S^{n-1} размерности $n-1$ в $\mathbb{R}^n$, группа G – псевдо-ортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$, $p+q=n$, надгруппа $\widetilde{G}$ – группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, открытые орбиты – гиперболоиды;

б) многообразие Ω – прямое произведение сфер $S^p \times S^{q-1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, $p+q=n$, группа G – псевдо-ортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$, $p+q=n$, надгруппа $\widetilde{G}$ – группа $\mathrm{SO}_0(p+1,q)$, открытые орбиты – гиперболоиды;

в) многообразие Ω – сфера S^{2n-2} в $\mathbb{C}^n$, группа G – псевдо-унитарная группа $\mathrm{SU}(n-1,1)$, $p+q=n$, надгруппа $\widetilde{G}$ – группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, открытые орбиты – комплексные гиперболические пространства;

г) многообразие Ω – прямое произведение сфер $S^{n-1} \times S^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, группа G – группа $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, надгруппа $\widetilde{G}$ – прямое произведение двух экземпляров группы G, открытые орбиты – пара-эрмитовы пространства ранга один.

Abstract: an outline of a new theory is given: canonical representations on flag manifolds of an overgroup.

Keywords: symmetric spaces; flag manifolds; canonical representations; boundary representations; Berezin transform.

Молчанов Владимир Федорович
д. ф.-м. н., профессор
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

Vladimir Molchanov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Tambov State University named after G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru