ПРОСТРАНСТВО ФОКА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО ДУАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО [1]

В. Ф. Молчанов

Пусть Λ – алгебра дуальных чисел $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = 0$. Она линейно изоморфна (над $\mathbb{R}$) плоскости $\mathbb{R}^2$. Для числа $z = x + iy$ сопряженное число есть $\overline{z} = x - iy$ и вещественная часть есть $\operatorname{Re} z = x$. Плоскостью Лобачевского дуального переменного назовем полосу $\mathcal{L}$ на плоскости Λ, задаваемую неравенством $z\overline{z} < 1$, или $x^2 < 1$.

В настоящей работе мы рассматриваем аналог пространства Фока для многообразия $\mathcal{L}$. Этот аналог может быть основой для построения квантования на $\mathcal{L}$. По поводу пространства Фока на классической плоскости Лобачевского (круг $z\overline{z} < 1$ на плоскости $\mathbb{C}$) см., например, [3]. Аналог пространства Фока для всей плоскости Λ был рассмотрен в работе [2].

Пусть G обозначает группу $\mathrm{SU}(1,1;\Lambda)$, состоящую из матриц

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \Lambda, \quad a\overline{a} - b\overline{b} = 1.$$

Она распадается на две связные части. Связная компонента G_e, содержащая единичную матрицу, есть подгруппа, характеризующаяся тем, что $\operatorname{Re} a \geqslant 1$. Она изоморфна группе гиперболических движений плоскости $\mathbb{R}^2$.

Многообразие $\mathcal{L}$ является орбитой группы G относительно дробно-линейного действия

$$z \mapsto z \cdot g = \frac{az + \overline{b}}{bz + \overline{a}},$$

так что группой движений многообразия $\mathcal{L}$ является $G/\pm E$, или G_e. Инвариантная мера на $\mathcal{L}$ есть

$$d\mu(z) = \frac{dxdy}{(1 - z\overline{z})^2} = \frac{dxdy}{(1 - x^2)^2}.$$

Мы рассматриваем функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дуального переменного z со значениями в Λ. Уравнения Коши–Римана имеют вид $u_x = v_y$, $u_y = 0$. Следовательно, аналитическая функция есть

$$f(z) = \varphi(x) + i\big[\varphi'(x)y + \psi(x)\big], \ z = x + iy, \tag{1}$$

штрих – дифференцирование. Будем считать, что $\varphi(x)$ – гладкая функция (непрерывно дифференцируемая), а $\psi(x)$ – непрерывная функция. Производная d/dz

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 05-01-00074а, 05-01-00001а, 06-06-96318 р_центр_а, Голландской организации научных исследований (NWO) 047-017-015, Научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.2.02.

действует как $\partial/\partial x$, так что если функции f отвечает пара (φ, ψ), то производной df/dz отвечает пара (φ', ψ') (если φ'', ψ' непрерывны). Многочлен $f(z)$ есть $f(x)+iyf'(x)$. Степень с вещественным показателем μ для числа $z = x+iy$ с положительной вещественной частью ($x > 0$) определяется с помощью биномиального разложения, а именно,

$$(x+iy)^\mu = x^\mu + i\mu x^{\mu-1}y.$$

Назовем пространством Фока $\mathcal{F}_\sigma$ на $\mathcal{L}$ совокупность аналитических на $\mathcal{L}$ функций $f(z)$, для которых функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, см. (1), содержатся в пространстве L^2 на интервале $(-1, 1)$ по мере $(1-x^2)^{-2\sigma-2}\,dx$, где σ – вещественное число такое, что $\sigma < -1/2$. Аналог постоянной Планка есть $h = 1/(-2\sigma-2)$. Определим "скалярное произведение" (эрмитову форму над Λ)

$$(f_1, f_2) = c\int_{\mathcal{L}} f_1(z)\overline{f_2(z)}(1-z\overline{z})^{-2\sigma-2}\,\delta(y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

где $\delta(y)$ – дельта-функция Дирака на прямой, $z = x+iy$. Формулу (2) можно переписать так:

$$(f_1, f_2) = c\left\{\int_{-1}^{1}\varphi_1(x)\varphi_2(x)(1-x^2)^{-2\sigma-2}\,dx\right.$$
$$\left.-i\int_{-1}^{1}\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \psi_1(x) & \psi_2(x)\end{vmatrix}(1-x^2)^{-2\sigma-2}\,dx\right\}.$$

Нормирующий множитель c взят так, чтобы $(1,1) = 1$, он равен

$$c = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)},$$

где

$$\lambda = -2\sigma - \frac{3}{2}.$$

В отличие от классического случая система функций $\{z^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, не является ортогональной. Оказывается, что $(z^n, z^m) = 0$ только при нечетном $n+m$, а при четном $n+m$ мы имеем

$$(z^n, z^m) = \frac{(1/2)^{[n+m]}}{(\lambda+1)^{[n+m]}}.$$

Здесь и дальше мы используем обозначение

$$a^{[k]} = a(a+1)\ldots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Ортогонализация системы $\{z^n\}$ приводит к системе функций (многочленов)

$$\begin{aligned} f_n(z) &= p_{\lambda,n}^{-1}C_n^\lambda(z)\\ &= \sum_{m=0}^{[n/2]}\binom{n}{2m}\frac{(1/2)^{[m]}}{(-\lambda-n+1)^{[m]}}\,z^{n-2m}, \end{aligned}$$

где $C_n^\lambda(z)$ – многочлен Гегенбауэра степени n, а $p_{\lambda,n}$ – его старший коэффициент, см. [1] 10.9. Скалярный квадрат функции f_n равен

$$\omega_n = (f_n, f_n) = 2^{-2\lambda-2n+1}\frac{n!\,\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+n)\Gamma(\lambda+n+1)}.$$

Всякая функция $f \in \mathcal{F}_\sigma$ разлагается в ряд по системе f_n:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z), \quad a_n = \frac{(f, f_n)}{\omega_n}.$$

Обозначим через $\Phi(z, \overline{w})$ ядро Бергмана, отвечающее системе $\{f_n\}$:

$$\Phi(z, \overline{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(z)\overline{f_n(w)}}{\omega_n}.$$

Как функция от z, это ядро есть обобщенная функция

$$\Phi_{\overline{w}}(z) = \Phi(z, \overline{w}) = \delta(x-u) + i(y+v)\delta'(x-u),$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$. Она обладает воспроизводящим свойством:

$$(f, \Phi_{\overline{w}}) = f(w).$$

Таким образом, ядро $\Phi(z, \overline{w})$ является переполненной системой в пространстве $\mathcal{F}_\sigma$ (системой когерентных состояний).

Определим представление T_σ группы G_e в пространстве $\mathcal{F}_\sigma$ формулой

$$\left(T_\sigma(g)f\right)(z) = f(z \cdot g)(bz + \overline{a})^{2\sigma}. \tag{3}$$

Для элементов g из группы G_e вещественная часть $\mathrm{Re}\,(bz + \overline{a})$ положительна, поэтому степень в (3) определена корректно.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G_e имеет своим базисом матрицы

$$L_0 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}, \; L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \; L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В представлении T_σ этим элементам отвечают следующие дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} T_\sigma(L_0) &= iz\frac{d}{dz} - i\sigma, \\ T_\sigma(L_1) &= \frac{i}{2}(1+z^2)\frac{d}{dz} - i\sigma z, \\ T_\sigma(L_2) &= \frac{1}{2}(1-z^2)\frac{d}{dz} + \sigma z. \end{aligned}$$

На степени z^n эти операторы действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} T_\sigma(L_0)z^n &= i(n-z)z^n, && (4)\\ T_\sigma(L_1)z^n &= \frac{i}{2}(n-2\sigma)z^{n+1}+\frac{i}{2}nz^{n-1}, && (5)\\ T_\sigma(L_2)z^n &= \frac{1}{2}(2\sigma-n)z^{n+1}+\frac{1}{2}z^{n-1}. && (6)\end{aligned}$$

Напишем еще действие на f_n элемента L_2:

$$T_\sigma(L_2)f_n=\frac{1}{2}(2\sigma-n)f_{n+1}+\frac{n(n-4\sigma-4)(n-2\sigma-3)}{8(n-2\sigma-3/2)(n-2\sigma-5/2)}f_{n-1}. \qquad (7)$$

Отсюда следует, что для $\sigma<-1/2$ представление T_σ неприводимо.

Для $2\sigma=0,1,2,\ldots$ формулы (4) – (6), а также (7), определяют представление группы G_e в пространстве многочленов от z степени не выше 2σ. Это пространство имеет размерность $2\sigma+1$ над Λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

2. *В. Ф. Молчанов.* Пространство Фока на плоскости дуального переменного. Вестник Тамбовского унив. Сер. Ест. техн. науки, 2002, том 7, вып. 1, 52–53.

3. *А. М. Переломов.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.