где

$$\omega(\tau) = \frac{1}{8\pi}(2\tau+1)\mathrm{ctg}\tau\pi\Gamma(\tau+\nu+1)\Gamma(-\tau+\nu),$$

так что

$$\omega(-\frac{1}{2}+i\rho) = \frac{1}{4\pi}\rho\mathrm{th}\rho\pi\left|\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+i\rho\right)\right|^2.$$

Наметим доказательство теоремы. Сначала мы находим резольвенту $R_\lambda = (\lambda E - L)^{-1}$ оператора L.

Пусть

$$Z_\tau(c) = (c^2+1)^{\nu/2}\int_0^\pi (c^2+\sqrt{c^2+1}\cdot\cos\alpha)_+^{\tau-\nu}(\sin\alpha)^{2\nu}\,d\alpha.$$

Функции $Z_\tau(c)$ и $\widehat{Z}_\tau(c)$ образуют базис в пространстве решений уравнения (1), они квадратично интегрируемы на $-\infty$ и $+\infty$, соответственно. Поэтому ядро резольвенты при $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ есть

$$K_\lambda(c,x) = \begin{cases} W_0^{-1}\widehat{Z}_\tau(c)Z_\tau(x), & c > x, \\ W_0^{-1}Z_\tau(c)\widehat{Z}_\tau(x), & c < x, \end{cases}$$

где $\lambda = \tau(\tau+1)$ и W_0 – коэффициент вронскиана: $W = W_0(c^2+1)^{-1}$.

Функция B_τ выражается через Z_τ и $\widehat{Z}_\tau$:

$$B_\tau = b_\nu\left[e^{i\pi\tau/2}Z_\tau + e^{-i\pi\tau/2}\widehat{Z}_\tau\right],$$

где $b_\nu^{-1} = 2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)$. Переходя от λ к τ и от Z_τ, $\widehat{Z}_\tau$ к B_τ, $\widehat{B}_\tau$ и используя теорему Титчмарша-Кодаиры, мы получим разложение:

$$(f,h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(2\tau+1)(S_\tau f,h)\Big|_{\tau=-1/2+i\rho}d\rho,$$

где $S_\tau = R_\lambda$. Под интегралом можно оставить только четную часть по ρ подинтегральной функции. После этого мы и получим (2).

Отметим, что коэффициент W_0 дается формулой

$$W_0 = b_\nu^{-2}(2\tau+1)p(\tau)p(-\tau-1)\mathrm{ctg}\tau\pi,$$

где $p(\tau)$ – коэффициент перед z^τ в асимптотике функции $P_\tau^{-\nu}(z)$ на бесконечности (см. [1], 3.9 (19)):

$$p(\tau) = \frac{2^\tau}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\tau+1/2)}{\Gamma(\tau+\nu+1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Molchanov V.F.* Harmonic analysis on a pair of hyperboloids. Preprint Univ. Leiden, MI2004-04, 2004. 21 p.

2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке грантов Минобр. РФ E02-1.0-156, НТП "Университеты России" ур.04.01.052, НИР темплана 01.002.2.

О РЕАЛИЗАЦИЯХ ОДНОГО ПАРА-ЭРМИТОВА ПРОСТРАНСТВА

© С. В. Цыкина

Пусть G есть группа $\mathrm{SO}_0(2,2)$ – связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^4$, сохраняющих билинейную форму $[x,y] = -x_0y_0 - x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Группа G имеет центр $\{\pm E\}$. Пусть H – подгруппа в G, состоящая из неподвижных точек инволюции

$g \mapsto IgI$, где $I = \mathrm{diag}\{-1,1,1,-1\}$. Она имеет две компоненты связности. Компонента, содержащая E, есть $H_e = \mathrm{SO}_0(1,1) \times \mathrm{SO}_0(1,1)$, вторая есть $-H_e$. Однородное пространство G/H является пара-эрмитовым симметрическим пространством. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые реализации пространства G/H и связи между ними.

Пусть $\mathcal{C}$ – конус $[x,x] = 0, x \neq 0$ в $\mathbb{R}^4$. Группа G действует на нем транзитивно сдвигами $x \mapsto xg$. Мы считаем, что группа действует справа, в соответствии с этим записываем вектор в виде строки. Для $x \in \mathbb{R}^4$ обозначим $|x| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$. Рассмотрим два сечения конуса: $S = \{|x| = 1\}$ и $\widetilde{\mathcal{X}} = \{x_0 = 1\}$. Первое сечение есть тор, второе можно отождествить с однополостным гиперболоидом $\mathcal{X} : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$, а именно, точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ из $\mathcal{X}$ мы сопоставляем точку $\widetilde{x} = (1, x_1, x_2, x_3)$ из $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Группа G действует на S следующим образом: $s \mapsto s \cdot g = sg/|sg|$. Это действие транзитивно. Возьмем в S две точки $s^{\pm} = (1,0,0,\pm 1)$. Рассмотрим диагональное действие группы G на прямом произведении $S \times S$, т. е. $(u,v) \mapsto (u \cdot g, v \cdot g), u, v \in S, g \in G$. Это действие уже не транзитивно. Имеются 8 орбит этого действия: $2,4,2$ орбиты размерностей $4,3,2$, соответственно. Две "большие" орбиты Ω^+ и Ω^- (размерности 4) состоят из пар (u,v) из $S \times S$, таких, что $[u,v] < 0$ или $[u,v] > 0$, с представителями (s^+, s^-) и $(s^+, -s^-)$, соответственно; две орбиты размерности 2 состоят из пар (u,u) и $(u,-u)$, $u \in S$; четыре орбиты размерности 3 имеют своими представителями пары $(s^+, (0, \pm 1, \pm 1, 0))$.

Стационарной подгруппой пары (s^+, s^-), а также пары $(s^+, -s^-)$, служит H_e, так что каждая из орбит $\Omega^{\pm}$ есть G/H_e. Чтобы получить G/H, надо от $S \times S$ перейти к фактор-пространству $(S \times S)/\pm$ (отождествляем пары (u,v) и $(-u,-v)$). Тогда каждая из орбит $\Omega^{\pm}/\pm$ есть как раз G/H.

Реализуем наше пространство $\mathbb{R}^4$ как пространство матриц

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть L есть группа $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{R})$. Прямое произведение $L \times L$ действует на пространстве этих матриц:

$$x \mapsto g_1^{-1} x g_2, \quad (g_1, g_2) \in L \times L,$$

при этом $\det x$ сохраняется. Так как $\det x = -\,(1/4)\,[x,x]$, то мы получаем гомоморфизм $\alpha : L \times L \to G$ с ядром $\{(E,E), (-E,-E)\}$, так что $G = (L \times L)/\mathbb{Z}_2$.

Гиперболоид $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}$ состоит из матриц, для которых $x_0 = \mathrm{tr}\, x = 1$. Группа L действует транзитивно на $\mathcal{X}$ сопряжениями:

$$x \mapsto g^{-1} x g, \quad g \in L.$$

Стационарной подгруппой точки $x^0 = (0,0,1)$ из $\mathcal{X}$ (или, что все равно, точки s^+ из $\widetilde{\mathcal{X}}$) служит подгруппа D диагональных матриц. Прямое произведение $L \times L$ действует на прямом произведении $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ гиперболоидов:

$$(x,y) \mapsto (g_1^{-1} x g_1, g_2^{-1} y g_2), \quad (g_1, g_2) \in L \times L.$$

Стационарная подгруппа пары (x^0, x^0) есть $D \times D$, ее образ при гомоморфизме α есть H. Поэтому G/H есть $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Поскольку G/H есть также и $\Omega^+/\pm$, мы получили диффеоморфизм $\varphi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \Omega^+/\pm$. В частности, он переводит (x^0, x^0) в $\pm(s^+, s^-)$.

Теперь рассмотрим отображение ψ "вдоль образующих": паре $\pm(u,v) \in S \times S/\pm$ мы сопоставляем пару (z,w) из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ такую, что $\widetilde{z} = u/u_0$, $\widetilde{w} = v/v_0$. Это отображение определено для $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$. Возьмем композицию $\psi \circ \varphi$ диффеоморфизма φ и отображения ψ: $(x,y) \mapsto \pm(u,v) \mapsto (z,w)$. Получим отображение $\pi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Для явного выражения π удобно использовать орисферические координаты ξ, η точки x из $\mathcal{X}$:

$$x = (1 - \xi\eta)^{-1}(\xi + \eta, \xi - \eta, 1 + \xi\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Пусть точки x, y из $\mathcal{X}$ имеют орисферические координаты (ξ, η) и (λ, μ), соответственно. Тогда точки z, w имеют координаты (λ, η) и (ξ, μ), соответственно. Геометрически это означает, что паре x, y ставится в соответствие пара z, w, которая получается при пересечении прямолинейных образующих, проходящих через x, y. Отображение π определено всюду на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, за исключением множества пар $(x, -x)$, $x \in \mathcal{X}$.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке грантов Минобр. РФ Е02-1.0-156, НТП "Университеты России" ур.04.01.052, НИР темплана 01.002.2.