формационных ресурсов с гипертекстовыми ссылками на языке HTML. Однако в последнее время XML (расширяемый язык разметки) и, особенно, специализированные программные системы Java и Flash расширили возможности использования мультимедиа в сети. Поэтому в последнее время разработка электронных учебников с программой-реализатором типа браузер получила большое распространение.

Данные в ЭИР это, в основном, контент – то, что мы видим и слышим. Соответственно, контент подразделяется на визуальный и звуковой ряды и текст. Информационный объем составляющих контента сильно различается в зависимости от статических или динамических мультимедийных составляющих. Динамические компоненты контента требуют высокоскоростных каналов обмена и занимают большие объемы при хранении. Поэтому аудиовизуальную информацию в цифровом коде в исходном виде практически никогда не хранят и не передают. Аудиовизуальную цифровую информацию сразу при создании подвергают компрессии (сжатию).

Если рассматривать не отдельные компоненты мультимедиа контента, а их совокупность на экране и в звуке и условия нормальной работы моделирующих программ и программы-реализатора ЭИР, то для нормальной работы современного мультимедиа продукта необходимы каналы связи и устройства с пропускной способностью около 3 Мбит/с.

На локальном компьютере это обеспечивает привод компакт-дисков или жесткий диск. Но в компьютерных сетях существующие каналы связи, при большом числе пользователей, могут существенно уменьшить скорость обмена информацией.

Но самые серьезные проблемы по цифровому потоку возникают в глобальных сетях. Большинство пользователей подключают домашний компьютер к сети через телефонную сеть с очень низкой пропускной способностью, которая у нас в стране оценивается в среднем как 10–50 Кбит/с.

Анализ информационных объемов компонентов контента нужен, прежде всего, для оценки возможных способов реализации и использования образовательных продуктов и типа исполнения: на CD для локального компьютера, на «винчестере» сервера локальной сети, или в качестве ресурса глобальной компьютерной сети. Желание соединить достоинства CD и сети может быть реализовано в комбинированном исполнении, когда «тяжелые» мультимедиа компоненты представлены на диске, а информационная поддержка, развитие продукта издателем и оперативная связь с учреждением образования осуществляются по сети.

Если объемы образовательного электронного издания значительно затрудняют его эффективное использование, то в соответствии с учебной программой электронный курс разбивается на учебные разделы, минимальные по объему, но цельные по содержанию. Примером может послужить раздел, посвященный определенному физическому закону, или раздел, соответствующий, скажем, одному уроку. В каждый раздел входят три модуля, соответствующих трем основным компонентам образовательного процесса: получение информации, практические занятия, аттестация. Информационный объем модуля на порядки меньше объема полного предметного курса. В результате получение его по сетевому запросу в режиме offline не представляет принципиальных трудностей даже для современных низкопоточных компьютерных сетей.

Использование вычислительной техники расширяет возможности человека, однако оно является лишь инструментом, орудием решения задач. Сама возможность компьютеризации учебного процесса возникает тогда, когда выполняемые человеком функции могут быть адекватно воспроизведены с помощью технических средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агеев В.Н., Древс Ю.Г.* Электронные издания учебного назначения: концепции, создание, использование. М.: МГУП, 2003.
2. *Башмаков А.М., Башмаков И.Л.* Разработка компьютерных учебников и обучающих систем. М.: ИИД «Филинъ», 2003.

Поступила в редакцию 17 октября 2006 г.

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЕ

© А.М. Добычин

Dobychin A.M. Some approaches to a solution of differential equations in computer algebra.

В вычислительной математике развиваются численные методы решений дифференциальных уравнений. В компьютерной алгебре развиваются численно-аналитические методы решения дифференциальных уравнений, при этом решение находится не в виде последовательности точек интегральных кривых, как в численном анализе, а сразу в виде функций.

Мы рассмотрим некоторые современные подходы к решению дифференциальных уравнений в компьютерной алгебре. В частности, метод Лапласа, подходы, развиваемые в работах М. Бронштейна, С.А. Абрамова и их учеников [1–3], а также в работах А.Д. Брюно и его школы [4–7].

В работах А.Д. Брюно рассматриваются дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, y – функция от x, $y = y(x)$, f – полином от $n + 2$ переменных в поле комплексных чисел. Например:

$$x^2y'^2 - 2x^2yy'' + ay^2 + x^2y^2 - x^4 = 0 .$$

Показывается, как с помощью методов степенной геометрии находить: (1) все степенные асимптотики решений такого уравнения; (2) все степенно-логарифмические разложения решений, имеющих степенную асимптотику; (3) нестепенные (экспоненциальные и логарифмические) асимптотики решений.

В работах С.А. Абрамова и М. Бронштейна предлагается другой подход к решению дифференциальных уравнений и их систем. В частности, в [1] они предлагают алгоритм решения систем дифференциальных уравнений в кольце полиномов $K[x]$ с базисом P_n над некоторым полем K характеристики 0, следующего вида:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{r1} & \cdots & L_{rm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где L_{ij} – эндоморфизмы, совместимые с базисом кольца $K[x]$. Эндоморфизм L называется совместимым с базисом P_n, если существуют $A, B \in N$, элементы $\alpha_{i,n} \in N$, для всех $n \geq 0$ и $-A \leq i \leq B$, такие что:

$$LP_n = \sum_{-A}^{B}\alpha_{i,n}P_{n+i} ,$$

где $P_n = 0$ для $k < 0$.

Данный алгоритм применим также к системам конечно-разностных и q-конечно-разностных уравнений. Задача сводится к построению таких конечно-разностных уравнений, по решениям которых можно найти решения системы (2).

Еще одним известным подходом к решению дифференциальных уравнений является операционный метод, использующий преобразование Лапласа.

Преобразованием Лапласа функции $f(x)$ называется функция

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}f(x)dx .$$

При этом $F(p)$ называется изображением функции $f(x)$, а функция $f(x)$ – оригиналом для $F(p)$. $f(x)$ непрерывна при неотрицательных x, за исключением, быть может, конечного числа точек, $f(x) = 0$ при $x < 0$, и существуют такие постоянные M и a, что

$$|f(x)| \leq Me^{ax}.$$

Алгоритм решения задачи Коши для уравнений операционным методом состоит в следующем. Рассмотрим задачу Коши:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x)$$
$$y(0) = y_0, y'(0) = 0, ..., y^{(n-1)}(0) = 0$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ – постоянные.

Обозначим $Y(p)$ и $F(p)$ изображения для $y(x)$ и $f(x)$. Тогда, переходя к изображениям, получим:

$$(p^nY(p) - p^{n-1}y_0 - \ldots - y_{n-1}) +$$
$$+ a_1(p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}y_0 - \ldots - y_{n-1}) + \ldots$$
$$+ a_nY(p) = F(p)$$

или, $\quad A(p)Y(p)+B(p) = F(p)$,

где $A(p)$ и $B(p)$ – многочлены.

Отсюда:

$$Y(p) = \frac{F(p) - B(p)}{A(p)}.$$

и искомое решение задачи Коши $y(x)$ является оригиналом для $Y(p)$. Аналогично техника применяется и в случае систем дифференциальных уравнений.

Подведем итоги проведенного обзора работ.

Операционный метод эффективен преимущественно для решения линейных дифференциальных уравнениям с постоянными коэффициентами и их системам.

В работах А.Д. Брюно и его учеников рассматривается более широкий класс дифференциальных уравнений, включающий нелинейные дифференциальные уравнения. Однако основной задачей при этом является не построение решений, а нахождение их асимптотик на бесконечности и в особых точках.

В работах С.А. Абрамова и М. Бронштейна рассматриваются линейные дифференциальные уравнения и их системы, у которых коэффициенты могут быть как числами, так и полиномами. Решения получают в виде многочленов или рядов. Этот подход является перспективным для реализации в компьютерных системах, так как в нем предлагается конструктивный метод для получения решений систем дифференциальных уравнений в аналитическом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Abramov S., Bronstein M.* On solutions of linear functional systems. ISAAC'2001.
2. *Abramov S., Bronstein M. and Petrovsek M.* On polynomial solutions of linear operator equations. In Proceedings of ISAAC'95 (1995), ACM Press, pp. 290-296.
3. *Abramov S., Petrovsek M. and Ryabenko A.* Special formal series solutions of linear operator equations. Discrete Mathematics 210 (2000). PP. 3-25.
4. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт №9. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003. 39 с.
5. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
6. *Брюно А.Д.* Степенные разложения решений системы алгебраических и дифференциальных уравнений. Препринт №68. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2003. 39 с.
7. *Брюно А.Д.* Разложения решений системы ОДУ. Препринт №59. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2003. 28 с.

Поступила в редакцию 10 октября 2006 г.