УДК 517.958

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© Е.О. Бурлаков

Ключевые слова: управляемые системы с запаздыванием, непрерывная зависимость решений от параметров.

В работе рассматривается задача управления для дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием. Предлагаются условия, гарантирующие непрерывную зависимость решения от значений управления и отклонения аргументов.

Обозначим: R^n – пространство векторов, имеющих n действительных компонент с нормой $|\cdot|$; μ – мера Лебега на отрезке $[a,b]$; $L([a,b],\mu,R^n)$ – пространство измеримых суммируемых функций $y:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|y\|_L=\int\limits_a^b|y(s)|ds$; $L_\infty([a,b],\mu,R^n)$ - пространство измеримых ограниченных в существенном функций $y:[a,b]\to R^n$ с нормой $\|y\|_{L_\infty}=\operatorname*{vraisup}\limits_{t\in[a,b]}|y(t)|$; $C([a,b],R^n)$ – пространство непрерывных функций $x:\ [a,b]\to R^n$ с нормой $\|x\|_C=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$; $AC([a,b],\mu,R^n)$ - пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:\ [a,b]\to R^n$, что $\dot x\in L([a,b],\mu,R^n)$ с нормой $\|x\|_{AC}=|x(a)|+\|\dot x\|_L$.

Рассмотрим задачи Коши:

$$\begin{gathered}\dot x(t)=f\big(t,x(t-\tau_1(t)),x(t-\tau_2(t)),\dots,x(t-\tau_m(t)),u(t)\big),\quad t\in[a,b],\\ x(\xi)=\varphi(\xi),\quad\text{если}\quad \xi\notin[a,b],\\ x(a)=\alpha;\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}\dot x(t)=f\big(t,x(t-\tau_{1i}(t)),x(t-\tau_{2i}(t)),\dots,x(t-\tau_{mi}(t)),u_i(t)\big),\ t\in[a,b],\\ x(\xi)=\varphi(\xi),\quad\text{если}\quad \xi\notin[a,b],\\ x(a)=\alpha,\quad i=1,2,\dots,\end{gathered}\tag{1i}$$

где функции $\tau_j, \tau_{ji} : [a,b] \to [0,+\infty)$, $j = 1,2, \ldots, m$, $i = 1,2, \ldots$, измеримы, функции $u, u_i : [a,b] \to R^k$, $i = 1,2, \ldots$, измеримы и ограничены в существенном, функция $\varphi : (-\infty, a) \to R^n$ равномерно непрерывна и ограничена, функция $m+2$ аргументов $f : [a,b] \times R^n \times \ldots \times R^n \times R^k \to R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

k_1) при любых $u \in R^k$, $x_j \in R^n$, $j = 1,2, \ldots, m$, функция $f(\,\cdot, x_1, x_2, \ldots, x_m, u)$ измерима;

k_2) при почти всех $t \in [a,b]$ функция f непрерывна по совокупности 2-го, ..., m+2-го аргументов;

k_3) для любого числа $r > 0$ существует такая суммируемая функция $g_r \in L([a,b], \mu, R)$, что для всех $u \in R^k$, $x_j \in R^n$, $j = 1,2, \ldots, m$, удовлетворяющих условиям $|u| \leqslant r$, $|x_j| \leqslant r$, $j = 1,2, \ldots, m$, выполнено $|f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, u)| \leqslant g_r(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$.

Определение 1. *Локальным решением* задачи (1), определенным на $[a, a+\gamma]$, $\gamma \in (0, b-a)$, будем называть функцию $z_\gamma \in AC([a, a+\gamma], \mu, R^n)$, удовлетворяющую уравнению (1) на $[a, a+\gamma]$. *Предельно продолженным решением* задачи (1), определенным на $[a, a+\eta)$, $\eta \in (0, b-a]$, будем считать функцию $z_\eta : [a, a+\eta) \to R^n$, сужение которой z_γ на $[a, a+\gamma]$ при любом $\gamma < \eta$ является его локальным решением и $\lim\limits_{\gamma \to \eta - 0} \int\limits_a^{a+\gamma} |\dot{z}_\gamma(s)| ds = \infty$. *Глобальным решением* задачи (1) назовем функцию $z \in AC([a,b], \mu, R^n)$, удовлетворяющую этому уравнению на всем $[a,b]$.

Определение 2 будем, естественно, применять и к уравнениям ($1i$).

Задачи (1) и ($1i$) равносильны операторным уравнениям

$$x(t) = (Fx)(t),\ t \in [a,b], \tag{2}$$

$$x(t) = (F_i x)(t),\ t \in [a,b],\ i = 1,2, \ldots, \tag{2i}$$

где операторы $F : C([a,b], R^n) \to C([a,b], R^n)$ и $F_i : C([a,b], R^n) \to C([a,b], R^n)$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned} (Fx)(t) &= \alpha + \int\limits_a^t f\big(s, (S_{\tau_1}x)(s), (S_{\tau_2}x)(s), \ldots, (S_{\tau_m}x)(s), u(s)\big) ds, \\ (F_i x_i)(t) &= \alpha + \int\limits_a^t f\big(s, (S_{\tau_{1i}}x_i)(s), (S_{\tau_{2i}}x_i)(s), \ldots, (S_{\tau_{mi}}x_i)(s), u_i(s)\big) ds. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $$(S_{\tau_j}x)(t) = \begin{cases} x(t-\tau_j(t)), \text{ если } t-\tau_j(t) \geqslant a, \\ \varphi(t-\tau_j(t)), \text{ если } t-\tau_j(t) < a; \end{cases}$$

$$(S_{\tau_{ji}}x)(t) = \begin{cases} x(t-\tau_{ji}(t)), \text{ если } t-\tau_{ji}(t) \geqslant a, \\ \varphi(t-\tau_{ji}(t)), \text{ если } t-\tau_{ji}(t) < a; \end{cases} \quad j=1,2, \ldots, m; \ i=1,2, \ldots .$$

Отметим, что определение операторов F и F_i на пространстве $C([a,b],R^n)$, а не на $AC([a,b],\mu,R^n)$, не приводит к увеличению множества решений, т. к. образами операторов F, F_i будут являться абсолютно непрерывные функции.

Сформулируем условия, при которых последовательность решений задач $(1i)$ сходится к решению задачи (1).

О п р е д е л е н и е 2 [1]. Последовательность операторов $\Phi_i : C([a,b],R^n) \to C([a,b],R^n)$ называется *непрерывно сходящейся* к оператору Φ, если для произвольного $x \in C([a,b],R^n)$ и любой последовательности $\{x_i\} \subset C([a,b],R^n)$, $\|x_i - x\|_C \to 0$, выполнено $\|\Phi_i x_i - \Phi x\|_C \to 0$.

О п р е д е л е н и е 3 [2]. Операторы $\Phi_i : C([a,b],R^n) \to C([a,b],R^n)$, $i = 1,2, \ldots$, называются *в совокупности компактными*, если для любого числа $r > 0$ множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Phi_i U_r$, $U_r = \{x \in C([a,b],R^n) \mid \|x\|_C \leqslant r\}$ компактно.

Определим множества $M_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \{t \in [a,b] | \ t-\tau_j(t) = a, \ t-\tau_{ji}(t) < a\}$, $i = 1,2, \ldots$.

Л е м м а. *Пусть либо $\mu(M_i) \to 0$ при $i \to \infty$, либо $\alpha = \varphi(a-0)$. Тогда, если последовательность функций τ_{ji} сходится к функции τ_j по мере, $j = 1,2, \ldots, m$, последовательность функций u_i сходится по мере к функции u, то последовательность операторов F_i непрерывно сходится к оператору F.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любые $x \in C([a,b],R^n)$, $\{x_i\} \subset C([a,b],R^n)$, $\|x_i - x\|_C \to 0$. Зафиксируем j. Имеем $|(S_{\tau_{ji}}x_i)(t) - (S_{\tau_j}x)(t)| \leqslant |(S_{\tau_{ji}}x_i)(t) - (S_{\tau_{ji}}x)(t)| + |(S_{\tau_{ji}}x)(t) - (S_{\tau_j}x)(t)|$. Очевидно, $|(S_{\tau_{ji}}x_i)(t) - (S_{\tau_{ji}}x)(t)| \to 0$ на $[a,b]$ при $i \to \infty$.

В случае $\alpha = \varphi(a-0)$, последовательность функций $(S_{\tau_{ji}}x)(t)$ сходится к функции $(S_{\tau_j}x)(t)$ по мере.

Пусть $\alpha \neq \varphi(a-0)$, $\mu(M_i) \to 0$, $i \to \infty$. Обозначим

$$M_{ji}^{+} = \{t \in [a,b] | \ t-\tau_j(t) > a, t-\tau_{ji}(t) < a\}, \ M_{ji}^{-} = \{t \in [a,b] | \ t-\tau_j(t) < a, t-\tau_{ji}(t) \geqslant a\},$$

$i = 1, 2, \ \dots$. Покажем, что $\mu M_{ji}^- \to 0$, $i \to \infty$. Пусть $T = \{t \in [a,b] |\ t - \tau_j(t) < a\}$, $\delta > 0$, $T_\delta = \{t \in [a,b] |\ t - \tau_j(t) < a - \delta\}$. Так как множества T_δ вложены и $T = \bigcup\limits_{\delta>0} T_\delta$, то [3] для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\mu(T \setminus T_\delta) < \varepsilon$. Зафиксируем эти значения δ, ε. Вследствие сходимости по мере последовательности функций τ_{ji} к функции τ_j, существует такой номер I, что $\mu\{t \in [a,b] |\ t - \tau_{ji}(t) \geqslant a\} \bigcap T_\delta < \varepsilon$ при всех $i > I$. Таким образом, $\mu M_{ji}^- < 2\varepsilon$, т. е. $\mu M_{ji}^- \to 0$ при $i \to \infty$. Аналогично доказывается, что $\mu M_{ji}^+ \to 0$, $i \to \infty$.

Покажем, что $S_{\tau_{ji}} x$ сходится к $S_{\tau_j} x$ по мере. Вследствие равномерной непрерывности функций $x(\cdot)$ на $[a,b]$ и $\varphi(\cdot)$ на $(-\infty, a)$ для любого $\sigma > 0$ найдется $\delta_1 > 0$, такое, что $|x(t_1) - x(t_2)| < \sigma$ и $|\varphi(t_3) - \varphi(t_4)| < \sigma$ при всех $t_1, t_2 \in [a,b]$, $t_3, t_4 \in (-\infty, a)$, удовлетворяющих оценкам $|t_2 - t_1| < \delta_1$ и $|t_4 - t_3| < \delta_1$. Так как последовательность функций τ_{ji} сходится по мере к функции τ_j, то для δ_1 и для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такой номер I_1, что при всех $i > I_1$ выполнено $|\tau_j(t) - \tau_{ji}(t)| < \delta_1$ для всех $t \in [a,b] \setminus G_{ji}$, где $\mu G_{ji} < \varepsilon_1$. Тогда $|(S_{\tau_{ji}} x)(t) - (S_{\tau_j} x)(t)| < \sigma$ при любом $t \in [a,b] \setminus (M_i \bigcup M_{ji}^+ \bigcup M_{ji}^- \bigcup G_{ji})$, где $\mu(M_i \bigcup M_{ji}^+ \bigcup M_{ji}^- \bigcup G_{ji}) \to 0$ при $i \to \infty$.

Итак, доказано, что $S_{\tau_{ji}} x_i$ сходится к $S_{\tau_j} x$ по мере при всех $j = 1, 2, \ \dots, m$, т. е. для любых $\delta_2, \varepsilon_2 > 0$ при каждом i, большем некоторого I_2, выполнено $|u_i(t) - u(t)| < \delta_2$, $|(S_{\tau_{ji}} x)(t) - (S_{\tau_j} x)(t)| < \delta_2$ для всех $j = 1, 2, \ \dots, m$ и почти всех $t \in [a,b] \setminus H$, $\mu H < \varepsilon_1$. Таким образом, учитывая условие k_2), получим, что последовательность функций $f(\cdot,\ (S_{\tau_{1i}} x_i)(\cdot),\ (S_{\tau_{2i}} x_i)(\cdot),\ \dots,\ (S_{\tau_{mi}} x_i)(\cdot),\ u_i(\cdot))$ сходится по мере к функции $f(\cdot,\ (S_{\tau_1} x)(\cdot),\ (S_{\tau_2} x)(\cdot),\ \dots,\ (S_{\tau_m} x)(\cdot),\ u(\cdot))$.

Вследствие сходимости $\|x - x_i\|_C \to 0$ и равномерной непрерывности функции φ на $(-\infty, 0)$ существует такое $r \in R$, что $|(S_{\tau_{ji}} x_i)(t)| \leqslant r$, $|(S_{\tau_j} x)(t)| \leqslant r$, $j = 1, 2, \ \dots, m$, при всех $t \in [a,b]$. Также, по условию, $|u_i(t)| \leqslant r$ и $|u(t)| \leqslant r$ при почти всех $t \in [a,b]$, $i = 1, 2, \ \dots$. Тогда, учитывая k_3), по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [3], получим

$$\int\limits_a^b |(f(t,\ (S_{\tau_1} x)(t),\ (S_{\tau_2} x)(t),\ \dots,\ (S_{\tau_m} x)(t),\ u(t)) -$$

$$-f(t,\ (S_{\tau_{1i}}x_i)(t),\ (S_{\tau_{2i}}x_i)(t),\ \ldots,\ (S_{\tau_{mi}}x_i)(t),\ u_i(t))|dt \to 0$$

при $i \to \infty$. Следовательно, $\|F_i x_i - Fx\|_C \to 0$. Лемма доказана.

Покажем, что условия Каратеодори k_1), k_2), k_3) гарантируют совокупную компактность операторов $F_i : C([a,b], R^n) \to C([a,b], R^n)$, $i = 1, 2, \ldots$, заданных равенствами (3). Возьмем произвольное $r > 0$, рассмотрим $U_r = \{x \in C([a,b], R^n) \mid \|x\|_C \leqslant r\}$. Покажем, что множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i U_r$ компактно. Воспользуемся теоремой Арцела [3]. Отметим, что $|(S_{\tau_{ji}}x)(t)|$ также не превосходит выбранного r при всех $t \in [a,b]$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots$, кроме того, по условию, найдется такое $\tilde{r} > 0$, что $|\varphi(t)| \leqslant \tilde{r}$ и $|u(t)| \leqslant \tilde{r}$ почти всюду на $[a,b]$. Следовательно, учитывая k_3),

$$|f(t,\ (S_{\tau_{1i}}x)(t),\ (S_{\tau_{2i}}x)(t),\ \ldots,\ (S_{\tau_{mi}}x)(t),\ u(t))| \leqslant g_{r_0}(t), \tag{4}$$

где $r_0 = \max\{r, \tilde{r}\}$ при любых $x \in U_r$, $i = 1, 2, \ldots$ и почти всех $t \in [a,b]$. Исходя из (4) легко показывается равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность множества $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i U_r$, а значит, и его компактность. Таким образом, операторы $F_i : C([a,b], R^n) \to C([a,b], R^n)$, $i = 1, 2, \ldots$, в совокупности компактны.

Из полученных свойств операторов $F_i : C([a,b], R^n) \to C([a,b], R^n)$ и теоремы 5 работы [4] следует

Т е о р е м а. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\mu(M_i) \to 0$ *при* $i \to \infty$, *либо* $\alpha = \varphi(a - 0)$;

2) *последовательность функций* τ_{ji} *сходится к функции* τ_j *по мере* $(j = 1, 2, \ldots, m)$;

3) *последовательность функций* u_i *сходится по мере к функции* u.

Тогда при каждом i *задачи* (1), (1i) *локально разрешимы, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Кроме того, существует такое* $\theta > 0$, *что*

- для каждого предельно продолженного решения z_η *уравнения* (1), *определенного на* $[a, a+\eta)$, *выполнено* $\eta > \theta$;

- для любого i и для каждого предельно продолженного решения $z_{i\eta_i}$ уравнения $(1i)$, определенного на $[a, a+\eta_i)$, выполнено $\eta_i > \theta$;

- если при каждом i произвольно выбрать определенное на $[a, a+\gamma]$ локальное решение $z_{i\gamma}$ уравнения $(1i)$, то полученная последовательность будет компактна в пространстве $AC([a, a+\gamma], \mu, R^n)$ и все ее предельные точки будут локальными решениями уравнения (1);

- если определенное на $[a, a+\gamma]$ локальное решение z_γ уравнения (1) единственно, то для любой последовательности определенных на $[a, a+\gamma]$ локальных решений $z_{i\gamma}$ уравнений $(1i)$ имеет место $\int\limits_a^{a+\gamma} |\dot z_\gamma(t) - \dot z_{i\gamma}(t)|dt \to 0.$

Продемонстрируем существенность условия 1) данной теоремы.

П р и м е р 1. Рассмотрим скалярные задачи

$$\dot x(t) = x(t - \tau(t)),\ t \in [0,1],\ x(0) = 1;$$

$$\dot x_i(t) = x_i(t - \tau_i(t)),\ t \in [0,1],\ x_i(0) = 1,\ i = 1, 2,\ \dots;$$
$$x_i(\xi) = 0, \text{если } \xi \notin [0,1];$$

где

$$\tau(t) = \begin{cases} t, \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ t - \frac{1}{2}, \text{если } t \in (\frac{1}{2}, 1]; \end{cases} \quad \tau_i(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{i}, \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ t - \frac{1}{2}, \text{если } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Отметим, что в данном случае τ_i сходятся к τ равномерно, но условие 1) теоремы не выполнено. Решениями соответствующих задач являются

$$z(t) = \begin{cases} 1 + t, \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{2}t, \text{если } t \in (\frac{1}{2}, 1]; \end{cases} \quad z_i(t) = \begin{cases} 1, \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \frac{1}{2} + t, \text{если } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\|z_i - z\|_{AC} = \frac{3}{4}$ при всех i.

Отметим также, что требование непрерывности функции f по совокупности аргументов нельзя заменить непрерывностью f по каждому аргументу в отдельности.

П р и м е р 2. Пусть $\dot x(t) = f(x, u_i),\ t \geqslant 0,\ x(0) = 0,\ i = 1, 2,\ \dots$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть λ пробегает все значения из $(0,1)$. Определим $f : R^2 \to R$:

$$f(x,u) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = u > 0; \\ 1, \text{ если } |x - u| \geqslant \varepsilon x; \\ \lambda, \text{ если } |x - u| \geqslant \lambda\varepsilon x > 0; \end{cases}$$

(график функции f изображен на рис. 1). При любых $x \in R$ и $u \in (0, +\infty)$ функции $f(x, \cdot)$ и $f(\cdot, u)$ непрерывны. Однако функция f не является непрерывной по совокупности своих аргументов. Возьмем последовательность управлений $\{u_i\} = const(t) > 0$, $u_i \to 0$ при $i \to \infty$. Решением данной задачи будет функция z_i, график которой представлен на рис. 2. Очевидно, что $z_i(\cdot) \to 0$ равномерно, в то время, как решением задачи $\dot{x}(t) = f(x, 0) \equiv 1$, $t \geqslant 0$, $x(0) = 0$ является функция $z(t) = t$.

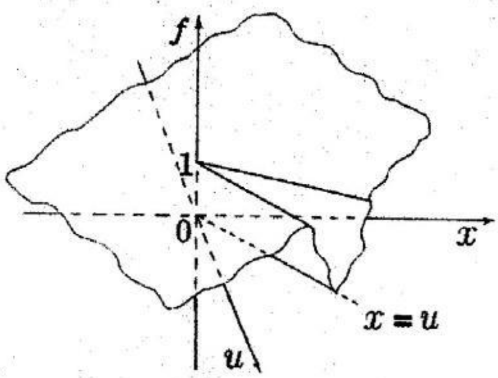

Рис. 1. График функции f

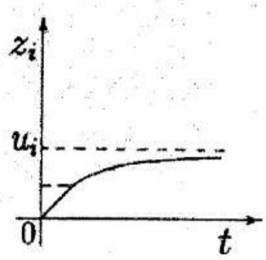

Рис. 2. График функции z_i

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artstein Z.* Continuous dependence of solutions of operator equations. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 231. № 1. P. 143-166.

2. *Максимов В.П.* О предельном переходе в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 11. С. 1984-1994.

3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

4. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Матем. сб. М., 2006. Т. 197. № 10. С. 33-56.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 07-01-00305), темплана 1.6.07 Рособразования, Норвежской Национальной Программы Научных Исследований FUGE при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского Комитета по развитию университетской науки и образования (NUFU), грант PRO 06/02, а также при финансовой поддержке CIGENE – Center for Integrative Genetics at Norwegian University of Life Sciences and the Norwegian Research Council и финансовой поддержке Lanekassen – Norwegian State Educational Loan Fund.

Поступила в редакцию 4 сентября 2008 г.

ON CONTINUOUS DEPENDENCE OF SOLUTIONS OF CONTROLLABLE SYSTEMS WITH DELAY

Burlakov E.

Conditions have been obtained for continuous dependence of solutions of differential equations on control and delay functions. This conditions guarantee that controllable system will not be strongly influenced by inaccurateness in parameters determination.

Keywords: controllable systems with delay, continuous dependence of solutions on parameters.