ЗАДАЧА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ УРОВНЯ И ОЦЕНКА РИСКА ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТОРА

© Г. А. Тырыгина

1. К настоящему времени разработаны различные математические модели формирования оптимального портфеля (в смысле оптимального сочетания риска и доходности) ценных бумаг и методы построения таких портфелей при определенных условиях. Напомним, что под доходностью портфеля понимается взвешенная средняя из ожидаемых доходностей m_i по каждому из элементов портфеля с портфельными весами x_i, под риском понимается стандартное отклонение ставок доходности по портфелю:

$$m_p = \sum m_i x_i, \qquad \sigma_p = \sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}},$$

где V_{ij} — ковариация доходностей ценных бумаг i-го и j-го видов.

Цель построения таких моделей состоит в том, чтобы определить, какая доля портфеля должна быть отведена каждому элементу портфеля, чтобы ожидаемый доход и уровень риска соответствовали целям инвесторов. При этом под целевой функцией может пониматься либо минимизация риска при заданной доходности, либо максимизация дохода при риске не выше заданного. При построении таких моделей на портфельные веса могут накладываться различные ограничения, зависящие от характера сделки, видов участвующих активов и т.д., определяя тем самым допустимые портфели. Например, в модели Блека допустимыми являются любые портфели. Отсутствие условия неотрицательности на портфельные веса позволяет получить сколь угодно большую доходность за счёт большого риска. В модели Марковица накладывается условие неотрицательности на портфельные веса. В ней доходность портфеля не превышает наибольшей доходности его элементов (активов). В модели Тобина-Шарпа-Литнера предполагается наличие безрисковых активов, доходность которых не зависит от состояния рынка и имеет постоянное значение. Математическим аппаратом, используемым в этих моделях, является квадратичная оптимизация при линейных ограничениях. В дальнейшем для решения таких задач стали привлекать методы факторного анализа. Например, модель оценки финансовых активов (CAPM — Capital Asserts Pricing Models) — однофакторная модель, в которой риск является функцией одного фактора — β-коэффициента, выражающего зависимость между доходностью ценной бумаги и доходностью рынка. Модель CAPM описывает зависимость между рыночным риском и требуемой доходностью и основана на концепции равновесного рынка. Эта модель наглядная, но предполагает не вполне реалистические условия: рациональное поведение инвесторов и т.д. В ней эффективность актива зависит от одного фактора эффективности большого рынка. В действительности зависимость между рынком и доходностью более сложная: требуемая доходность акций — функция нескольких факторов. Это предположение положено в основу многофакторной модели — теории арбитражного ценообразования (APT — Arbitrage Pricing Theory). Эта модель позволяет рассматривать любое количество факторов риска. При построении таких моделей трудность состоит в том, что практически трудно выяснить какие факторы риска следует включать в модель.

Перечисленные модели позволяют получать достаточно приблизительные оценки риска и не дают более детального анализа случайного процесса изменения котировок во времени.

2. Поведение реальной экономической, финансовой системы в той или иной мере стохастический процесс, т.к. нельзя точно указать, какие факторы (внешние и внутренние) будут определять поведение системы в будущем, можно говорить о вероятности того, что в будущем система придет в то или иное состояние.

Мы предлагаем использовать для решения обсуждаемых задач результаты решения задач «пересечения уровня», рассматриваемых в теории случайных процессов. Если под риском портфельного инвестора понимать вероятность того, что за определенный период времени доходность ценной бумаги будет ниже заданного инвестором значения u, то для оценки риска портфельных инвестиций, на наш взгляд, целесообразно привлекать модели и методы, разработанные в теории случайных процессов. Можно использовать известные результаты теории случайных процессов, связанные с «пересечениями» (число пересечений, входов и выходов процесса $\xi(t)$ фиксированного уровня u в течение времени T). В общем случае нахождение вероятностных характеристик выбросов случайного процесса (вероятности заданного числа выбросов в течение некоторого промежутка времени, вероятностного распределения времени пребывания случайного процесса выше заданного уровня и т.д.) не всегда простая задача. Однако для решения, например, задачи вычисления среднего числа выбросов, среднего времени пребывания выше заданного уровня имеются точные формулы.

К примеру, пусть $C_u(0,T)$ — среднее значение числа пересечения уровня u траекторий стационарного нормального процесса $\xi(t)$ за время $0 \leqslant t \leqslant T$.

$$E\{C_u(0,T)\} = \frac{T}{\pi}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} e^{-u^2/2\lambda_0}, \text{если } E\xi(t) = 0;$$

$$E\{C_u(0,T)\} = \frac{T}{\pi}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} e^{\frac{(u-m)^2}{2\lambda_0}}, \text{если } E\xi(t) = m,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — спектральные моменты [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: Расчёт и риск. М.: Инфра, 1994.

2. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.

Тырыгина Галина Алексеевна
Тольяттинский государственный ун-т
Россия, Тольятти
e-mail: Galex@tltsu.ru

Поступила в редакцию 30 апреля 2007 г.