БЛАГОДАРНОСТИ: Благодарю Евгения Леонидовича Тонкова за постановку задачи и полезное обсуждение результатов работы.

Abstract: Statements on continuous dependence on parameters of solutions of general boundary value problem for functional-differential equation are obtained, correctness of concrete boundary value problems for controllable systems with argument divergence is investigated.

Key words: boundary value problems; controllable systems; differential equations with argument divergence.

Бурлаков Евгений Олегович
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: eb_@bk.ru

Evgeniy Burlakov
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: eb_@bk.ru

УДК 519.1

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА НА ПЛОСКОСТИ НАД КОНЕЧНЫМ КОЛЬЦОМ[1]

© Е. В. Водолажская

Ключевые слова: преобразование Радона; конечные поля; кольца классов вычетов.

Аннотация: Преобразование Радона R на плоскости над конечным кольцом K сопоставляет функции f на K суммы ее значений по прямым. Мы предлагаем новую формулу обращения для поля и кольца классов вычетов по модулю p^2.

Пусть K – конечное кольцо с q элементами, $K^2 = K \times K$ – плоскость над K. *Прямой* на плоскости K^2 назовем множество ℓ всех точек $z = (x, y) \in K^2$, удовлетворяющих уравнению $ax + by = c$, где $a, b, c \in K$, причём a и b не являются делителями нуля одновременно. Пусть H – множество всех прямых.

Для конечного множества X обозначим через $L(X)$ линейное пространство функций на X со значениями в $\mathbb{C}$. Размерность его равна количеству элементов в X.

Преобразование Радона R есть линейный оператор $L(K^2) \to L(H)$, который сопоставляет всякой функции $f \in L(K^2)$ функцию $Rf \in L(H)$ – "интегралы" функции f по прямым ℓ, то есть

$$(Rf)(\ell) = \sum_{z \in \ell} f(z).$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 09-01-00325 а, научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы" РНП 2.1.1/1474 и Темпланом 1.5.07.

Мы хотим найти формулу обращения для преобразования Радона, это все равно, что найти левый обратный оператор L для оператора R, то есть $LR = E$. Для этого рассмотрим сопряженный оператор $R^* : L(H) \to L(K^2)$:

$$(R^*F)(z) = \sum_{z \in \ell} F(\ell),$$

и рассмотрим произведение $T = R^*R$, оно есть оператор $L(K^2) \to L(K^2)$. Предположим, что оператор T обратим, тогда

$$L = T^{-1}R.$$

Оператор T имеет простой смысл: его матричный элемент $T(z,w)$ указывает количество прямых, проходящих через точки $z, w \in K^2$ (для $w = z$ это – количество прямых, проходящих черех точку z).

Матрицы $R(\ell, z)$ и $R^*(z, \ell)$ операторов R и R^* получаются друг из друга транспонированием:

$$R(\ell, z) = R^*(z, \ell) = \begin{cases} 1, & z \in \ell, \\ 0, & z \notin \ell. \end{cases}$$

Пусть K – поле с q элементами. В этом случае

$$T(z,w) = \begin{cases} q+1, & w = z, \\ 1, & w \neq z. \end{cases}$$

Следовательно, матрица T может быть записана в виде $T = qE + I$, где E – единичная матрица, I обозначает матрицу , у которой все элементы равны 1. Используя $I^2 = q^2 I$, вычисляем обратную матрицу:

$$T^{-1} = \frac{1}{q^2(q+1)} \left\{ q(q+1)E - I \right\}.$$

Отсюда получаем, что матрица оператора L есть

$$L(z, \ell) = \begin{cases} \dfrac{1}{q+1}, & z \in \ell, \\ -\dfrac{1}{q(q+1)}, & z \notin \ell. \end{cases}$$

Аналогичным (но более сложным) образом мы вычисляем оператор L, когда K – кольцо классов вычетов по модулю p^2, p – простое.

Abstract: The Radon transform R on the plane over a finite ring K assigns to a function f on K sums of its values on lines. We write a new inversion formula for a field and the ring of cosets modulo p^2.

Key words: Radon transform; finite fields; ring of cosets.

Водолажская Елена Валерьевна
старший лаборант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

Elena Vodolazhskaya
senior laboratory assistant
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru