УДК 517.98

Операторы Лапласа на пара-эрмитовых пространствах с псевдо-ортогональной группой движений [9]

© С. В. Цыкина

Ключевые слова: симплектические многообразия, псевдо-ортогональные группы, операторы Лапласа

Мы рассматриваем пара-эрмитовы симметрические пространства G/H, для которых группа G есть псевдо-ортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$. Наша цель в данной статье состоит в описании алгебры $\mathbb{D}(G/H)$ дифференциальных операторов на G/H, инвариантных относительно G, в указании образующих в этой алгебре – так называемых операторов Лапласа – и в явном вычислении радиальных частей этих операторов Лапласа.

We consider para-Hermitian symmetric spaces G/H with the pseudo-orthogonal group $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$. In this article we describe the algebra $\mathbb{D}(G/H)$ of differential operators on G/H invariant with respect to G, determine generators in this algebra – the so-called Laplace operators – and write explicit expressions for their radial parts.

Мы рассматриваем пара-эрмитовы симметрические пространства G/H, для которых группа G есть псевдо-ортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$. Все такие пространства (с данной G) получаются факторизацией из "самого большого" пространства G/H с $H = \mathrm{SO}_0(p-1,q-1) \times \mathrm{SO}_0(1,1)$. Отображение накрытия не более чем четырехкратно. Размерность всех этих пространств G/H равна $2n-4$, где $n = p+q$, сигнатура есть $(n-2, n-2)$, а ранг равен 2.

Наша цель в данной статье состоит в описании алгебры $\mathbb{D}(G/H)$ дифференциальных операторов на G/H, инвариантных относительно G, в указании образующих в этой алгебре – так называемых операторов Лапласа – и в явном вычислении радиальных частей этих операторов Лапласа. Эти результаты не зависят от указанной выше факторизации, поэтому мы возьмем наиболее удобное для наших целей пространство G/H, а именно такое, которое является G-орбитой в присоединенном представлении группы G.

[9]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

§ 1. Псевдо-ортогональная группа и ее алгебра Ли

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму:

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i,$$

где $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = -1$, $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 1$, и $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ - векторы из $\mathbb{R}^n$. Пусть G есть группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$ – связная компонента единицы в группе линейных преобразований с определителем 1 пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих билинейную форму $[x,y]$. Мы рассмотрим общий случай $p > 1$, $q > 1$. Мы будем считать, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X порядка n, удовлетворяющих условию $X'I + IX = 0$, где $I = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, штрих означает матричное транспонирование. Возьмем в $\mathfrak{g}$ матрицу

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы сейчас записываем матрицы n-ого порядка в блочном виде, отвечающем разбиению $n = 1 + (n-2) + 1$. Стационарная подгруппа H матрицы Z_0 в присоединенном представлении состоит из матриц

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & v & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, $v \in \mathrm{SO}(p-1, q-1)$. Группа H состоит из двух связных кусков. Связная компонента единицы H_e состоит из матриц (1.1), где $\alpha = \mathrm{ch} t$, $\beta = \mathrm{sh} t$. Следовательно, $H_e = \mathrm{SO}_0(1,1) \times \mathrm{SO}_0(p-1, q-1)$.

Наше многообразие G/H есть G-орбита в алгебре $\mathfrak{g}$, содержащая Z_0.

Оператор $\mathrm{ad}\, Z_0$ имеет три собственных значения: $-1, 0, +1$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму соответствующих собственных подпространств

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q}^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{q}^+,$$

где $\mathfrak{h}$ есть алгебра Ли группы H. Подпространства $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ состоят соответственно из матриц

$$X_\xi = \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 \\ \xi^* & 0 & \xi^* \\ 0 & -\xi & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_\eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ \eta^* & 0 & -\eta^* \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix},$$

здесь ξ, η – векторы-строки из $\mathbb{R}^{n-2}$, φ^* обозначает $I_1 \varphi'$, где

$$I_1 = \mathrm{diag}\,\{\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}\}.$$

Размерность обоих пространств $\mathfrak{q}^{\pm}$ равна $n-2$. Подгруппа H сохраняет оба подпространства $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ при присоединенном действии:

$$Z \longmapsto h^{-1}Zh, \quad Z \in \mathfrak{q},\ h \in H. \tag{1.2}$$

Пусть $h \in H$ имеет вид (1.1). При действии (1.2) координаты $\xi \in \mathfrak{q}^-$ и $\eta \in \mathfrak{q}^+$ преобразуются следующим образом

$$\xi \mapsto \widetilde{\xi} = (\alpha+\beta)\xi v, \qquad \eta \mapsto \widehat{\eta} = (\alpha-\beta)\eta v. \tag{1.3}$$

Возьмем в G подгруппы $Q^- = \exp \mathfrak{q}^-$ и $Q^+ = \exp \mathfrak{q}^+$.

§ 2. Конус

Пусть $\mathcal{C}$ – конус $[x,x]=0,\ x \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем транзитивно. Возьмем в конусе две точки

$$s^- = (1,0,\dots,0,-1), \quad s^+ = (1,0,\dots,0,1).$$

Рассмотрим следующие сечения конуса (проходящие через эти точки соответственно):

$$\Gamma^- = \{x_1 - x_n = 2\}, \quad \Gamma^+ = \{x_1 + x_n = 2\}.$$

Они пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе порождает соответствующие дробно-линейные действия на Γ^- и Γ^+. Стационарными подгруппами в группе G точек $s^- \in \Gamma^-$ и $s^+ \in \Gamma^+$ служат максимальные параболические подгруппы $P^+ = Q^+H$ и $P^- = Q^-H$, соответственно. Группы Q^- и Q^+ действуют просто транзитивно на Γ^- и Γ^+, соответственно. Это позволяет ввести координаты на Γ^- и Γ^+ с помощью координат $\xi = (\xi_2,\dots,\xi_{n-1})$ из $\mathfrak{q}^-$ и $\eta = (\eta_2,\dots,\eta_{n-1})$ из $\mathfrak{q}^+$, а именно, для точек $u \in \Gamma^-$ и $v \in \Gamma^+$ положим:

$$u = u(\xi) = s^- e^{X_\xi} = (1+\langle\xi,\xi\rangle,\ 2\xi,\ -1+\langle\xi,\xi\rangle), \tag{2.1}$$
$$v = v(\eta) = s^+ e^{Y_\eta} = (1+\langle\eta,\eta\rangle,\ 2\eta,\ 1-\langle\eta,\eta\rangle), \tag{2.2}$$

где $\langle\varphi,\psi\rangle$ обозначает билинейную форму в $\mathbb{R}^{n-2}$ с матрицей I_1:

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \varphi_i \psi_i.$$

Отметим, что

$$[u,v] = -2N(\xi,\eta), \tag{2.3}$$

где

$$N(\xi,\eta) = 1 - 2\langle\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle. \tag{2.4}$$

§ 3. Пространство G/H

Реализуем пространство G/H следующим образом. Представим прямое произведение $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ конуса на себя как множество двустрочечных матриц

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $x, y \in \mathcal{C}$. Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество матриц z, для которых $[x, y] = -2$. Это множество содержит матрицу z^0, отвечающую паре (s^-, s^+):

$$z^0 = \begin{pmatrix} s^- \\ s^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

Группа G действует на множестве $\mathcal{Z}$ умножениями справа: $z \mapsto zg$. Назовем две матрицы эквивалентными, если одна получается из другой умножением слева на диагональную матрицу второго порядка с определителем единица:

$$z \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} z, \qquad a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}. \tag{3.3}$$

Множество $\widetilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}/\mathbb{R}^*$ классов эквивалентности есть как раз наше многообразие G/H. Стационарной подгруппой точки z^0 служит H.

Рассмотрим еще одну реализацию пространства G/H. Сопоставим паре (x, y) из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ матрицу

$$\omega = Iy'x = y^*x,$$

где $y^* = Iy'$, матрица I указана в § 1. Множество таких матриц есть множество $\mathcal{M}$ матриц z ранга 1, удовлетворяющих условиям:

$$zIz' = 0, \qquad z'Iz = 0.$$

След матрицы ω равен $[x, y]$:

$$\mathrm{tr}\ \omega = [x, y].$$

Линейное действие $(x, y) \longmapsto (xg, yg)$ группы G на $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ превращается на множестве $\mathcal{M}$ в присоединенное действие:

$$\omega \mapsto g^{-1}\omega g. \tag{3.4}$$

Пространство G/H можно отождествить с многообразием Ω матриц ω из $\mathcal{M}$, удовлетворяющих условию

$$\mathrm{tr}\ \omega = 1.$$

Действие (3.4) сохраняет Ω. Поэтому мы можем взять многообразие Ω в качестве реализации пространства G/H.

Связь этих двух реализаций пространства G/H – следующая: матрице z, см. (3.1), отвечает матрица

$$\omega = \frac{y^*x}{[x, y]}$$

из Ω. В частности, начальной точке z^0 отвечает матрица

$$\omega^0 = -\frac{1}{2}(s^+)^* s^- = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \cdots & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Поскольку сечения $\Gamma^{\pm}$ пересекаются по одному разу почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$, прямое произведение $\Gamma^- \times \Gamma^+$ вкладывается в G/H. А именно, паре $(\xi, \eta) \in \Gamma^- \times \Gamma^+$ отвечает матрица

$$z = \begin{pmatrix} u(\xi) \\ v(\eta)/N(\xi, \eta) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Следовательно, ξ, η являются локальными координатами в G/H.

Касательное пространство к G/H в начальной точке z^0 можно отождествить с пространством $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^- + \mathfrak{q}^+$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $S(\mathfrak{q})$ – пространство многочленов на $\mathfrak{q}$. Действие (1.3) группы H вызывает действие ее в $S(\mathfrak{q})$. Пусть $S(\mathfrak{q})^H$ обозначает алгебру многочленов из $S(\mathfrak{q})$, инвариантных относительно H.

Теорема 3.1 *Алгебра $S(\mathfrak{q})^H$ порождается двумя многочленами*

$$\langle \xi, \eta \rangle, \quad \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle.$$

Доказательство. Как следует из [1], алгебра многочленов от ξ и η, инвариантных относительно подгруппы $\mathrm{SO}(p-1, q-1)$ группы H, имеет своими образующими три многочлена: $\langle \xi, \xi \rangle$, $\langle \eta, \eta \rangle$, $\langle \eta, \xi \rangle$. При действии (1.3) эти многочлены умножаются соответственно на $(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha - \beta)^2$, 1. Так как $\alpha + \beta = (\alpha - \beta)^{-1}$, то для всей группы H алгебра инвариантов имеет в качестве образующих указанные в теореме многочлены. $\square$

§ 4. Корневое разложение для пространства G/H

В этом параграфе мы будем записывать матрицы из G и $\mathfrak{g}$ в виде блочных матриц соответственно разбиению $n = 1 + 1 + (n-4) + 1 + 1$ числа n на 5 слагаемых.

Всякая максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{q}$, состоящая из полупростых элементов, имеет размерность 2. Это означает, что ранг пространства G/H равен 2. В качестве такой подалгебры возьмем подалгебру $\mathfrak{a}$, состоящую из матриц

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Сопряженное к $\mathfrak{a}$ пространство $\mathfrak{a}^*$ состоит из линейных функций от $t = (t_1, t_2)$. Такие функции мы будем отождествлять с векторами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ из $\mathbb{R}^2$ и записывать в виде скалярного произведения:

$$(\lambda, t) = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2.$$

Алгебра $\mathfrak{a}$ расщепима: вся алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму корневых подпространств для пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha,$$

подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ состоит из таких $X \in \mathfrak{g}$, что $[A_t, X] = (\alpha, t)X$. Множество ненулевых корней состоит из следующих 8 векторов из $\mathfrak{a}^*$:

$$(\pm 1, \pm 1), \quad (\pm 1, 0), \quad (0, \pm 1),$$

знаки $\pm$ берутся во всех комбинациях. Это – система корней типа B_2. Кратности корней равны соответственно $1,\ n-4,\ n-4$.

В качестве упорядочения в $\mathfrak{a}^*$ возьмем лексикографическое упорядочение по координатам. Множество положительных корней состоит из векторов: $(1, \pm 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Пусть $\mathfrak{n}$ обозначает подалгебру в $\mathfrak{g}$, образованную положительными корневыми подпространствами, а $\mathfrak{z}$ – отрицательными. Размерность каждой из них равна $2n - 6$. Алгебра $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму: $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{z}$. Подалгебра $\mathfrak{n}$ состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x+y & \alpha & 0 & -x+y \\ -x-y & 0 & \beta & x+y & 0 \\ \alpha^* & \beta^* & 0 & -\alpha^* & -\beta^* \\ 0 & x+y & \alpha & 0 & -x+y \\ -x+y & 0 & \beta & x-y & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, α, β – векторы-строки из $\mathbb{R}^{n-4}$, $\alpha^* = I_2\alpha'$, $\beta^* = I_2\beta'$, $I_2 = \operatorname{diag}\{\lambda_3, \ldots, \lambda_{n-2}\}$.

Обозначим $A = \exp \mathfrak{a}$, $N = \exp \mathfrak{n}$.

§ 5. Операторы Лапласа на G/H

Дифференциальный оператор D на G/H называется инвариантным относительно G, если он перестановочен со сдвигами на элементы $g \in G$, то есть

$$D \circ R(g) = R(g) \circ D, \tag{5.1}$$

где $R(g)$ – сдвиг многообразия G/H на элемент g: $R(g)x = xg$. Напомним, что G/H есть пространство правых классов смежности $x = Hs$, $s \in G$, так что $xg = Hsg$.

Множество всех дифференциальных операторов на G/H, инвариантных относительно G, образует алгебру, обозначим ее через $\mathbb{D}(G/H)$. Как следует из [3], эта алгебра находится во взаимно однозначном соответствии с алгеброй $S(\mathfrak{q})^H$ многочленов на пространстве $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$, инвариантных относительно H.

Это соответствие устанавливается так. Оператор D из $\mathbb{D}(G/H)$ вполне определяется тем, как он действует в начальной точке He пространства G/H. Возьмем в $\mathfrak{q}$ координаты ξ, η, те же переменные являются локальными координатами в многообразии Ω, которое служит реализацией пространства G/H, см. § 3. Начальной точкой в Ω является матрица ω^0, см. (3.5), с координатами $\xi = 0, \eta = 0$. Пусть $P(\xi, \eta)$ – многочлен из $S(\mathfrak{q})^H$. Обозначим через $P(\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta)$ дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, который получается из P заменой ξ_i и η_j соответственно на $\partial/\partial\xi_i$ и $\partial/\partial\eta_j$, то есть

$$P\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\eta}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\xi_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial\eta_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\eta_{n-1}}\right).$$

Многочлену $P \in S(\mathfrak{q})^H$ отвечает оператор $D \in \mathbb{D}(G/H)$ такой, что

$$(Df)(\omega^0) = P\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\eta}\Big) f(\xi, \eta)\Big|_{\xi=\eta=0}.$$

В другие точки $\omega \in \Omega$ оператор D можно разнести с помощью условия перестановочности (5.1). А именно, пусть g – какой-нибудь элемент из G, переводящий точку ω^0 в точку ω с координатами ξ, η. Тогда

$$(D_P f)(\xi, \eta) = D_P(R(g)f)(0, 0).$$

Обозначим через Δ_2 и Δ_4 образующие в $\mathbb{D}(G/H)$, соответствующие образующим $\langle\xi, \eta\rangle$ и $\langle\xi, \xi\rangle\langle\eta, \eta\rangle$ в алгебре $S(\mathfrak{q})^H$, см. теорему 3.1. Эти операторы являются дифференциальными операторами второго и четвертого порядка соответственно. В точке ω^0 имеем

$$\Delta_2 = \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\eta_j}, \quad \Delta_4 = \sum_{i,j=2}^{n-1} \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^4}{\partial\xi_i^2 \partial\eta_j^2}. \tag{5.2}$$

Оператор Лапласа-Бельтрами на G/H совпадает с Δ_2.

Явные выражения операторов Δ_2 и Δ_4 в произвольной точке весьма громоздки (особенно Δ_4). Для работы с этими операторами вычислим их радиальные части относительно подгруппы N, определенной в § 4.

Возьмем в Ω множество точек ω, которые получаются из ω^0 сдвигом сначала на элемент $a = a(t_1, t_2)$ из A и затем на элемент n из N, то есть

$$\omega = n^{-1} a^{-1} \omega^0 a n. \tag{5.3}$$

Эти точки заполняют некоторую окрестность точки ω^0. Тем самым в этой окрестности мы вводим координаты t_1, t_2 и x, y, α, β из подгрупп A и N, соответственно. Пусть функция f, заданная в этой окрестности, не зависит от $n \in N$. Тогда она есть функция от $t=(t_1,t_2)$: $f(\omega)=F(t)$. Применим к f оператор D из $\mathbb{D}(G/H)$. Полученная функция Df тоже не зависит от $n\in N$, так что

$$Df = \overset{0}{D} F,$$

где $\overset{0}{D}$ – некоторый дифференциальный оператор от $t=(t_1,t_2)$. Он называется *радиальной частью* оператора D относительно подгруппы N. Следующая теорема аналогична теореме Карпелевича [2] для римановых симметрических пространств.

Теорема 5.1 *Радиальная часть $\overset{0}{D}$ оператора $D\in\mathbb{D}(G/H)$ относительно подгруппы N есть дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Возьмем в A элемент $b=a(u_1,u_2)$ и подействуем им на точку ω, указанную в (5.3). Получим точку $\widetilde{\omega}$:

$$\widetilde{\omega}=b^{-1}n^{-1}a^{-1}\omega^0 anb = b^{-1}n^{-1}bb^{-1}a^{-1}\omega^0 abb^{-1}nb. \tag{5.4}$$

Подгруппа A нормализует подгруппу N, поэтому элемент $b^{-1}nb$, участвующий в (5.4), принадлежит N. Элемент ab, участвующий в (5.4), принадлежит A: $ab=a(t_1+u_1,t_2+u_2)$. Следовательно, точка $\widetilde{\omega}$ есть

$$\widetilde{\omega}=\widetilde{n}^{-1}\widetilde{a}^{-1}\omega^0\widetilde{a}\widetilde{n}, \tag{5.5}$$

где $\widetilde{a}=a(t_1+u_1,t_2+u_2)\in A$, $\widetilde{n}\in N$.

Возьмем оператор $D\in\mathbb{D}(G/H)$. Пусть, как и выше, функция f зависит только от $t=(t_1,t_2)$: $f(\omega)=F(t)$. По (5.1) имеем

$$(Df)(\widetilde{\omega})=D(f(\widetilde{\omega})), \quad \widetilde{\omega}=b^{-1}\omega b, \tag{5.6}$$

в правой части оператор D применяется к $f(\widetilde{\omega})$ как к функции от ω. В силу (5.5) равенство (5.6) дает для радиальной части $\overset{0}{D}$ соотношение:

$$(\overset{0}{D} F)(t+u) = \overset{0}{D} (F(t+u)), \tag{5.7}$$

где в правой части оператор $\overset{0}{D}$ применяется к $F(t+u)$ как к функции от t. Равенство (5.7) означает, что дифференциальный оператор $\overset{0}{D}$ перестановочен со сдвигами по переменным t_1,t_2. Следовательно, его коэффициенты постоянны. □

Далее нам удобно использовать реализацию пространства G/H как множества $\mathcal{Z}$ двустрочечных матриц z, см. § 3. Пусть у нас есть две матрицы w и z, отвечающие парам (u,v) и (x,y) из $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$. Составим матрицу второго порядка из псевдоскалярных произведений:

$$B(w,z)=\begin{pmatrix} [u,x] & [u,y] \\ [v,x] & [v,y] \end{pmatrix}$$

Лемма 5.2 *Матрица $B(w,z)$ не изменяется при диагональном действии группы G, т.е. $B(wg,zg)=B(w,z)$. Если c – матрица второго порядка: $c\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, то*

$$B(cw,z)=cB(w,z),\quad B(w,cz)=B(w,z)c'$$

(штрих означает матричное транспонирование).

Введем матрицу:

$$z^- = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим действие на матрицу z^- подгрупп A и N. Оказывается, это действие сводится к умножению z^- *слева* на некоторые матрицы второго порядка. А именно, для матриц $A_t\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$, см. (4.1), и $X\in\mathfrak{n}$, см. (4.2), имеем

$$z^-A_t = \begin{pmatrix} -t_1 & 0 \\ 0 & -t_2 \end{pmatrix} z^-,\qquad z^-X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2y & 0 \end{pmatrix} z^-,$$

поэтому для элемента $a=a_t=\exp A_t$ из A и элемента $n=\exp X$ из N имеем

$$z^-a = \begin{pmatrix} e^{-t_1} & 0 \\ 0 & e^{-t_2} \end{pmatrix} z^-,\quad z^-n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2y & 1 \end{pmatrix} z^-. \tag{5.8}$$

Лемма 5.3 *Параметры t_1,t_2 выражаются через координаты ξ,η с помощью следующих формул:*

$$\begin{aligned} e^{2t_1} &= \frac{1}{N}\cdot[\sigma,u]\cdot[\sigma,v], \\ e^{t_1+t_2} &= \frac{1}{2N}\cdot\begin{vmatrix} [\sigma,u] & [\sigma,v] \\ [\tau,u] & [\tau,v] \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $N=N(\xi,\eta)$, $u=u(\xi)$, $v=v(\eta)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $B(z^-,z^0an)$. По лемме 5.2 и формулам (5.8) имеем

$$B(z^-,z^0an) = \begin{pmatrix} e^{t_1} & e^{t_1} \\ 2ye^{t_1}-e^{t_2} & 2ye^{t_1}+e^{t_2} \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

С другой стороны, для матрицы z, заданной формулой (3.1), имеем

$$B(z^-,z) = \begin{pmatrix} x_1+x_{n-1} & y_1+y_{n-1} \\ x_2+x_n & y_2+y_n \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Если здесь заменить матрицу z эквивалентной матрицей, см. (3.3), то по лемме 5.2 матрица $B(z^-,z)$ умножится *справа* на матрицу $\mathrm{diag}\{a,a^{-1}\}$. Поэтому на множестве классов эквивалентности матриц z корректно определены произведения элементов первого столбца матрицы $B(z^-,z)$ на элементы ее второго столбца и, следовательно, корректно определен ее определитель. Сравнивая (5.9) с (5.10), получаем

$$e^{2t_1} = (x_1 + x_{n-1})(y_1 + y_{n-1}), \tag{5.11}$$

$$2e^{t_1+t_2} = \begin{vmatrix} x_1 + x_{n-1} & y_1 + y_{n-1} \\ x_2 + x_n & y_2 + y_n \end{vmatrix}. \tag{5.12}$$

Возьмем в качестве z матрицу (3.6). Подставляя в (5.11) и (5.12) выражения строк этой матрицы, мы получим формулы леммы. $\square$

Теорема 5.4. *Радиальные части* $\overset{0}{\Delta}_2$ *и* $\overset{0}{\Delta}_4$ *операторов* Δ_2 *и* Δ_4 *даются следующими формулами:*

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\Delta}_2 &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + (n-2)\frac{\partial}{\partial t_1} + (n-4)\frac{\partial}{\partial t_2}, \qquad (5.13)\\
\overset{0}{\Delta}_4 &= \frac{\partial^4}{\partial t_1^4} - 2\frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial t_2^4} + \\
&+ 2(n-2)\frac{\partial^3}{\partial t_1^3} - 2(n-4)\frac{\partial^3}{\partial t_1^2 \partial t_2} - 2(n-2)\frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2^2} + 2(n-4)\frac{\partial^3}{\partial t_2^3} + \\
&+ (n^2 - 6n + 12)\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - 2(n-4)(n-2)\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + (n^2 - 14n + 36)\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - \\
&- 2(n-4)(n-2)\frac{\partial}{\partial t_1} - 2(n-4)(3n-10)\frac{\partial}{\partial t_2}. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Удобно записать эти формулы следующим образом. Введем два дифференциальных оператора L_1 и L_2 по переменным t_1, t_2 второго порядка

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2(n-3)\frac{\partial}{\partial t_1} + 2(n-3)\frac{\partial}{\partial t_2} + (n-4)^2 = \\
&= [\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} + n - 3]^2 - (2n-7) \\
L_2 &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2\frac{\partial}{\partial t_1} - 2\frac{\partial}{\partial t_2} - 2(n-4) = \\
&= [\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2} + 1]^2 - (2n-7).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\Delta}_2 &= \frac{1}{2}\left\{L_1 + L_2 - (n-4)(n-6)\right\}, \\
\overset{0}{\Delta}_4 &= L_1 L_2 + 2(n-4)^3.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 5.4. Пусть функция f зависит только от t_1, t_2, то есть

$$f(\xi, \eta) = F(t_1(\xi, \eta), t_2(\xi, \eta)), \tag{5.15}$$

где $F(t_1,t_2)$ – некоторая функция от двух переменных t_1,t_2. Пусть D – оператор из $\mathbb{D}(G/H)$ и $\overset{0}{D}$ – его радиальная часть. Поскольку $\overset{0}{D}$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (теорема 5.1), для вычисления $\overset{0}{D}$ достаточно применить D к обеим частям равенства (5.15) в начальной точке $\xi=0,\eta=0$. Мы получаем:

$$\overset{0}{D}F = DF(t_1(\xi,\eta),t_2(\xi,\eta))\big|_{\xi=0,\,\eta=0}$$

Возьмем $D=\Delta_2$ и $D=\Delta_4$. По (5.2) получаем:

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\Delta}_2 F &= \sum\lambda_k\frac{\partial^2}{\partial\xi_k\partial\eta_k}F(t_1(\xi,\eta),t_2(\xi,\eta))\Big|_{\xi=0,\,\eta=0} = \\
&= \sum\lambda_k\frac{\partial t_1}{\partial\xi_k}\frac{\partial t_1}{\partial\eta_k}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial t_1^2}+\\
&+ \sum\lambda_k\left(\frac{\partial t_1}{\partial\xi_k}\frac{\partial t_2}{\partial\eta_k}+\frac{\partial t_1}{\partial\eta_k}\frac{\partial t_2}{\partial\xi_k}\right)\frac{\partial^2F}{\partial t_1\partial t_2}+\\
&+ \sum\lambda_k\frac{\partial t_2}{\partial\xi_k}\frac{\partial t_2}{\partial\eta_k}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial t_2^2}+\\
&+ \sum\lambda_k\frac{\partial^2 t_1}{\partial\xi_k\partial\eta_k}\cdot\frac{\partial F}{\partial t_1}+\sum\lambda_k\frac{\partial^2 t_2}{\partial\xi_k\partial\eta_k}\cdot\frac{\partial F}{\partial t_2}
\end{aligned}$$

и аналогичное выражение для $\overset{0}{\Delta}_4 F$. Здесь $k,l\in\{2,\ldots,n-1\}$, производные функций t_1 и t_2 берутся в точке $\xi=0,\eta=0$. Эти производные мы находим из формул леммы 5.3. Подставляя их в выражения $\overset{0}{\Delta}_2 F$ и $\overset{0}{\Delta}_4 F$ мы получим (5.13),(5.14). $\square$

Эти радиальные части можно записать еще следующим образом. Полусумме положительных корней из $\mathfrak{a}^*$ отвечает следующая линейная функция:

$$\rho(t)=\frac{1}{2}\{(n-2)t_1+(n-4)t_2\}.$$

Обозначим

$$\Delta_t=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial t_2^2},\qquad \Box_t=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\Delta}_2 &= e^{-\rho(t)}\circ\Delta_t\circ e^{\rho(t)}-\frac{1}{2}(n^2-6n+10),\\
\overset{0}{\Delta}_4 &= e^{-\rho(t)}\circ\{\Box_t^2-2(2n-7)\Delta_t\}\circ e^{\rho(t)}-(n-3)^2.
\end{aligned}$$

Литература

1. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.

2. Ф. И. Карпелевич. Геометрия геодезических и собственные функции оператора Бельтрами–Лапласа на симметрических пространствах. Труды Моск. матем. об-ва, 1965, том 14, 48–185.

3. С. Хелгасон. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.