ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ И НАДГРУППЫ ДЛЯ ПАРА-ЭРМИТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ РАНГА ОДИН

© В.Ф. Молчанов

Мы развиваем нашу идею [1]. В настоящей работе мы рассматриваем связь полиномиального квантования и надгруппы для пространств G/H, где $G = SL(n,\mathbb{R})$, $H = GL(n-1,\mathbb{R})$. По сравнению с [1] мы объясняем еще, как в этом контексте появляется преобразование Березина.

Надгруппа $\widetilde{G}$ для G есть $G \times G$. Пусть $\mathcal{C}$ есть множество матриц $x \in \mathrm{Mat}\,(n,\mathbb{R})$ ранга 1. Это – "конус": вместе с x он содержит $tx, t \in \mathbb{R}^*$. Группа $\widetilde{G}$ действует на $\mathcal{C}$:

$$x \mapsto g_1^{-1} x g_2, \quad (g_1, g_2) \in \widetilde{G}.$$

Для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\nu = 0, 1$ пусть $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ обозначает пространство функций f класса C^∞ на $\mathcal{C}$ однородных "степени λ, ν":

$$f(tx) = t^{\lambda,\nu} f(x),$$

где $t \in \mathbb{R}^*$ и мы используем обозначение $t^{\lambda,\nu} = |t|^\lambda \mathrm{sgn}^\nu t$. Определим два представления $R_{\lambda,\nu}$ и $\widehat{R}_{\lambda,\nu}$ в $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{C})$: первое действует сдвигами:

$$(R_{\lambda,\nu}(g_1, g_2) f)(x) = f(g_1^{-1} x g_2),$$

второе получается из первого перестановкой g_1 и g_2.

Запишем $g \in G$ в блочном виде соответственно разбиению $n = (n-1) + 1$:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Подгруппа $H \subset G$ состоит из блочно диагональных матриц.

Пусть $\mathcal{X}$ – сечение конуса $\mathcal{C}$ плоскостью $\mathrm{tr}\, x = 1$. Оно инвариантно относительно диагонали в $\widetilde{G}$, изоморфной G, и есть G/H. Группа $\widetilde{G}$ действует на $\mathcal{X}$ следующим образом:
$x \mapsto \widetilde{x} = (g_1^{-1} x g_2)/\mathrm{tr}\,(g_1^{-1} x g_2)$. Ограничения функций из $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ на $\mathcal{X}$ образуют некоторое пространство $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{X})$. В реализации на $\mathcal{X}$ представление $R_{\lambda,\nu}$ имеет вид

$$(R_{\lambda,\nu}(g_1, g_2) f)(x) = f(\widetilde{x}) \{\mathrm{tr}\,(g_1^{-1} x g_2)\}^{\lambda,\nu}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Оператор $Q_{\lambda,\nu}$, определенный формулой

$$(Q_{\lambda,\nu})(x) = c(\lambda,\nu) \int_{\mathcal{X}} \{\mathrm{tr}\,(xy)\}^{-\lambda-n,\nu} f(y)\, dy$$

сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $\widehat{R}_{\lambda-n,\nu}$ и $\widehat{R}_{\lambda,\nu}$ с $R_{-\lambda-n,\nu}$. Оператор $Q_{\lambda,\nu}$ можно распространить на обобщенные функции на $\mathcal{X}$. Тождественная единица f_0 на $\mathcal{X}$ является собственной функцией для $Q_{\lambda,\nu}$, множитель $c(\lambda,\nu)$ взят так, чтобы собственное число равно было 1.

Напомним [2] максимально вырожденные представления $\pi^{\pm}_{\sigma,\varepsilon}$ группы G: они действуют в некоторых пространствах функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ по формулам:

$$(\pi^-_{\sigma,\varepsilon}(g)\varphi)(\xi) = \varphi(\widetilde{\xi})(\xi\beta + \delta)^{\sigma,\varepsilon}, \quad (\pi^+_{\sigma,\varepsilon}(g)\varphi)(\eta) = \psi(\widehat{\eta})(\eta\widehat{\beta} + \widehat{\delta})^{\sigma,\varepsilon},$$

где ξ, η – векторы-строки из $\mathbb{R}^{n-1}$, $\widehat{g} = I g'^{-1} I$, штрих означает транспонирование,
$I = \mathrm{diag}\,\{-1, \ldots, -1, 1\}$,

$$\widetilde{\xi} = \frac{\xi\alpha + \gamma}{\xi\beta + \delta}, \quad \widehat{\eta} = \frac{\eta\widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}}{\eta\widehat{\beta} + \widehat{\delta}}.$$

Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты ξ, η:

$$x = \frac{1}{1 - \xi\eta'} \begin{pmatrix} -\eta'\xi & -\eta' \\ \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\lambda,\nu}(\xi,\eta) = (1 - \xi\eta')^{\lambda,\nu}.$$

Элементы (e,g) и (g,e) из $\widetilde{G}$ переводят точку с координатами (ξ,η) в точку с координатами $(\widetilde{\xi},\eta)$ и $(\xi,\widehat{\eta})$, соответственно. Поэтому

$$(R_{\lambda,\nu}(e,g)f)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi(\xi,\eta)}(\pi^-_{\lambda,\nu}(g)\otimes 1)[f(\xi,\eta)\Phi(\xi,\eta)],$$

$$(R_{\lambda,\nu}(g,e)f)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi(\xi,\eta)}(1\otimes\pi^+_{\lambda,\nu}(g))[f(\xi,\eta)\Phi(\xi,\eta)].$$

Перейдем здесь от группы к универсальным обертывающим алгебрам Env и сохраним символы для представлений. Тогда зависимость от ν исчезнет, так что мы не пишем ν. Возьмем $f=f_0$. Тогда для $X\in\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ получим

$$R_\lambda(0,X)f_0 = \frac{1}{\Phi}(\pi^-_\lambda(X)\otimes 1)\Phi,$$

$$R_\lambda(X,0)f_0 = \frac{1}{\Phi}(1\otimes\pi^+_\lambda(X))\Phi.$$

Здесь правые части – это соответственно ковариантный символ оператора $\pi^-_\lambda(X)$ и контравариантный символ оператора $\pi^-_{-\lambda-n}(X)$. Оператор $Q_{-\lambda-n,\nu}$ переводит второй символ в первый, так что $Q_{-\lambda-n,\nu}$ есть преобразование Березина $B_{\lambda,\nu}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Молчанов В.Ф.* Полиномиальное квантование и надгруппы // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2004. Т. 9. Вып. 1. С. 93–94.

2. *Волотова Н.Б.* Полиномиальное квантование на пространстве $SL(n,\mathbb{R})/GL(n-1,\mathbb{R})$ // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2003. Т. 8. Вып. 1. С. 141–142.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке грантов Минобр. РФ Е02-1.0-156, НТП "Университеты России" ур.04.01.052, НИР темплана 01.002.2.

СПЛЕТАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМАХ НА КОНУСЕ

© А.В.Опимах

В настоящей работе мы находим сплетающие операторы (в матричной форме) для представлений псевдоортогональной группы $G=\mathrm{SO}_0(1,n-1)$ в дифференциальных формах первой степени на конусе. Эти представления были описаны в [1]. Мы будем рассматривать общий случай: $n>5$. Напомним необходимый материал из [1].

Группа G сохраняет форму $[x,y]=-x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ в $\mathbb{R}^n$. Мы будем считать, что G действует линейно в $\mathbb{R}^n$ справа: $x\mapsto\widetilde{x}=xg$, в соответствии с этим мы записываем вектор в виде строки. Пусть $\mathcal{X}_0$ – конус (верхняя пола) $[x,x]=0$, $x_1>0$. Группа G действует на нем транзитивно.

Для многообразия M обозначим через $\Lambda^1(M)$ пространство дифференциальных форм на M первого порядка с гладкими коэффициентами.

Группа G действует в $\Lambda^1(\mathcal{X}_0)$ сдвигами: элемент $g\in G$ переводит форму $\omega=\sum\omega_k(x)dx_k$ в форму $\widetilde{\omega}=\sum\omega_k(\widetilde{x})d\widetilde{x}_k$, в качестве координат на $\mathcal{X}_0$ можно взять $x_2,\ldots,x_n$. Пусть $\Lambda^1_\sigma(\mathcal{X}_0)$, $\sigma\in\mathbb{C}$, – подпространство в $\Lambda^1(\mathcal{X}_0)$, состоящее из форм степени однородности σ:

$$\omega|_{x\mapsto tx}=t^\sigma\omega,\ t>0.$$

Группа G сохраняет это пространство. Пусть $T^{(1)}_\sigma$ – соответствующее представление группы G. Оно распадается в сумму двух представлений T_σ и R_σ, действующих в инвариантных пространствах D_σ и H_σ, соответственно. Пусть S – сечение конуса плоскостью $x_1=1$, это – сфера размерности $n-2$,