ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т. 14, вып. 4, 2009

УДК 517.077

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РЕКОНСТРУКЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СДВИГА [1]

© **В. И. Максимов**

Ключевые слова: управление; реконструкция; экстремальный сдвиг.

Аннотация: В работе обсуждаются вопросы применения метода экстремального сдвига для решения некоторых задач реконструкции и управления динамическими системами с помощью экстремального сдвига; в частности, указывается алгоритм реконструкции неизвестного входа в линейной системе при измерении части фазовых координат.

Метод экстремального сдвига [1] — один из эффективнейших методов исследования задач управления по принципу обратной связи. Цель данного сообщения состоит в том, чтобы проиллюстрировать возможности этого метода на примерах некоторых задач робастного управления и динамической реконструкции неизвестных характеристик. Обратимся к одной задаче динамической реконструкции. Пусть имеется динамическая система Σ, которая функционирует на промежутке времени $T = [t_0, \vartheta]$, $\vartheta < +\infty$, и описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^N$, $F(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ — заданная функция, A — $n \times n$-мерная матрица, B — $n \times N$-мерная матрица. Траектория системы (1) $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, зависит от начального состояния x_0 и изменяющегося во времени неизвестного входного воздействия $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$. На промежутке T взято равномерное разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ с шагом δ, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты τ_i измеряется выход системы $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r$ (C — $r \times n$-мерная матрица). Выход измеряется с ошибкой. Результаты неточных измерений — вектора $\xi_i^h \in \mathbb{R}^r$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - y(\tau_i)|_r \leqslant h, \quad i \in [0 : m-1], \tag{2}$$

где $h \in (0, 1)$ — величина информационной погрешности, символ $|y|_r$ означает евклидову норму r-мерного вектора y. Требуется построить алгоритм, позволяющий «синхронно с развитием процесса» по результатам неточных измерений $y(\cdot)$ восстанавливать как всю фазовую траекторию $x(\cdot)$, так и управление $u(\cdot)$, порождающее выход $y(\cdot)$. Именно требуется сформировать некоторую пару («траектория–управление») $\{w_*^h(\cdot), u_*^h(\cdot)\}$, «близкую» к паре $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$. Такова содержательная постановка задачи реконструкции. В дальнейшем считаем, что начальное условие системы (1) задано неточно. Именно, вместо вектора x_0 известен вектор x_0^h: $|x_0 - x_0^h|_n \leqslant h$.

Перейдем к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи. Согласно подходу [1–3] для решения задачи следует указать уравнение вспомогательной управляемой системы M, называемой моделью, а также закон формирования управления ею. При этом как саму модель, так и закон управления (включающий интервалы «постоянства» управлений в модели) следует согласовать подходящим образом с величиной информационной погрешности h. Фиксируем семейство $\{\Delta_h\}$ разбиений отрезка T на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta$, $\delta = \delta(h)$,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00008), Интеграционного проекта УрО РАН и Программы РАН «Математическая теория управления».

$\tau_{h,0} = t_0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$, с диаметрами $\delta = \delta(h)$. Модель зададим системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{w}_0^h(t) &= CBv^h(t), \quad t \in [\tau_1, \vartheta], \\ \dot{w}_1^h(t) &= Aw_1^h(t) + Bv^h(t), \\ \dot{w}_2^h(t) &= w_1^h(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $w^h = \{w_0^h, w_1^h, w_2^h\}$, $w^h(t) = 0$ при $t \in [t_0, \tau_1]$.

После того, как модель определена, алгоритм решения задачи отождествляется с законом формирования управлений $v^h(\cdot)$ в модели по принципу обратной связи, который отождествляется с парой $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$, где $\mathcal{U}_h$ — функция, ставящая в соответствие четверке $q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i^h, \xi_{i-1}^h, w^h(\tau_i)\}$, $i \in [1 : m-1]$, вектор

$$v_i^h = \mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)). \tag{4}$$

При этом полагается

$$v^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{h,i}. \tag{5}$$

Таким образом, тройка $(\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ при каждом $h \in (0,1)$ определяет некоторый алгоритм D_h на множестве измерений $\xi(\cdot) \in \Xi(y(\cdot), h)$, формирующий по принципу обратной связи (4), (5) выход

$$D_h \xi^h(\cdot) = \{w^h(\cdot), v^h(\cdot)\}, \quad h \in (0,1). \tag{6}$$

Выход алгоритма D_h (при каждом h и $\xi^h(\cdot) \in \Xi(y(\cdot), h)$) определяется согласно (6), где $w^h(\cdot) = \{w_*^h(\cdot), w_1^h(\cdot)\}$, $w_*^h(\cdot)$ — часть траектории модели, «аппроксимирующая» некоторую функцию $\tilde{x}(\cdot)$ вида $\tilde{x}(t) = x(t) + f(t)$, $t \in T$ ($f(\cdot)$ — известная функция), $w_1^h(\cdot)$ — вспомогательная часть модельной траектории. Символ $\Xi(y(\cdot), h)$ означает множество всех кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot)$, $\xi^h(t) = \xi_i^h$, $t \in \delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, удовлетворяющих (2) при $\tau_i = \tau_{h,i} \in \Delta_h$.

Семейство алгоритмов $D_h = (\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$, (3)–(6), $h \in (0,1)$, назовем регуляризирующим [2, 3], если a) $v^h(\cdot) \to u(\cdot)$ в $L_2(T; \mathbb{R}^N)$; b) $w_*^h(\cdot) \to \tilde{x}(\cdot)$ в $C(T; \mathbb{R}^n)$ при $h \to 0$. Пусть

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = \begin{cases} (CB)^{-1}\Big|\delta^{-1}(\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) - CAx_1^h(\tau_i) - CF(\tau_i) - \\ CAw_1^h(\tau_i)\Big|_r s_i/|s_i|_r, \quad \text{если } |s_i|_r \neq 0 \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

при $i \in [1 : m-1]$, $m = m_h$. Здесь $x_1^h(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0^h, 0)$ — решение системы $\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t)$, $t \in T$, $x(t_0) = x_0^h, s_i = \xi_{i-1}^h - \xi_0^h - \int\limits_{t_0}^{\tau_i} C\{F(\tau) + Ax_1^h(\tau)\}\, d\tau - w_0^h(\tau_i) - CAw_2^h(\tau_i)$.

Т е о р е м а. *Пусть* $r = N$; $\operatorname{rank} CB = r$, *а функция* $F(\cdot)$ *непрерывна. Пусть также* $v^h(t) = 0$ *при* $t \in [t_0, \tau_1]$, $\delta(h) \to 0$, $h/\delta(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда семейство алгоритмов* D_h, $h \in (0,1)$, (3)–(6) *является регуляризирующим. При этом* $w_*^h(\cdot) \equiv w_1^h(\cdot) \to \tilde{x}(\cdot)$ *в* $C(T; \mathbb{R}^n)$ *при* $h \to 0$, *если* $\tilde{x}(t) = x(t) + f(t)$ *при* $t \in T$, $f(t) = x_1(t)$ — *решение системы* (1) *с начальным условием* $x_1(t_0) = x_0$ *и* $u(t) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Basel, Gordon and Breach, 1995.

2. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 579–597.

3. *Maksimov V.I.* Dynamical inverse problems of distributed systems. VSP, Boston, 2002.

Abstract: in this paper the questions of extremal shift method application for solution of some reconstruction and dynamic systems control problems are discussed; in particular, the algorithm of unknown input reconstruction in linear system at some phase coordinates measuring is shown.
Keywords: control; reconstruction; extremal shift.

Максимов Вячеслав Иванович
д. ф.-м. н., профессор
Институт математики и механики
УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Vyacheslav Maksimov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Institute of Mathematics and Mechanics
of UrD RAS
Russia, Ekaterinburg
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

УДК 519.85

О ПРОЕКТЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ [1]

© **Г. И. Малашонок**

Ключевые слова: параллельная компьютерная алгебра; строение классов; структуры данных; внешняя память.

Аннотация: Описывается новый проект параллельной компьютерной алгебры; две главные особенности этого проекта - это новая структура классов и новые структуры данных, которые предназначены для хранения данных во внешней памяти; особое внимание уделяется параллельному ядру системы.

1. Введение

Одной из очень важных задач, стоящих сегодня перед человечеством, является задача сохранения и применения накопленных знаний. В первую очередь это относится к естествознанию и техническому знанию.

Как известно, языком естествознания, а вместе с ним и всего технического знания, является математика. Поэтому главной задачей всей той компьютерной науки, которая ориентирована на естествознание и технику, является задача сохранения и применения математического знания.

Существующие сегодня математические пакеты отражают состояние решения этой задачи на данный момент. Эти пакеты делятся на два класса – численные пакеты и символьные или аналитические пакеты, которые еще называют системами компьютерной алгебры. Признанным лидером в этом классе систем компьютерной алгебры является система "Mathematica" компании Wolfram Research, за ней следуют MAPLE, Magma, MACSYMA, AXIOM (IBM), REDUCE, CoCoA, Macaulay, SINGULAR и др.

[1]Работа выполнена при поддержке программы "Развитие потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/1853) и Темплана 1.12.09.