Обозначим $\langle g(t),\, h\rangle = \int\limits_{\Omega} F(t,\, x,\, \varphi(t,\, x))h(x)\, dx + \langle f(t),\, h\rangle,\ h \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\int\limits_{\Omega} |\bigtriangledown(u(x) - \varphi(t,\, x))|^p\, dx + \int\limits_{\Omega} \Phi(t,\, x,\, u)\, dx + \langle f(t),\, u\rangle \to \inf,\ u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega). \qquad (1)$$

Решение этой экстремальной задачи является обобщенным решением уравнения

$$-\Delta_p(u - \varphi(t)) + F(t,\, x,\, u) + f(t) = 0.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\hat{u}(t)$ — *решение задачи* (1). *Тогда для любого* $t \in T$ *существует* $r(t) > 0$ *такое, что неравенство* $\|\hat{u}(s) - \hat{u}(t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \leqslant C\rho(s,\, t)^{\min\ \frac{1}{p-1},\, \frac{1}{3-p}}$ *выполнено для любого* $s \in B_{r(t)}(t)$, *где* $C = C(p,\, \Omega, L,\ \alpha,\, M,\, A,\, \|g(t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)^*})$ (*если* $n \geqslant p$), $C = C(p,\, \Omega, L,\ c(\cdot),\, A,\, \|g(t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)^*})$ (*если* $n < p$). *Если* $\inf_{t\in T} \|g(t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)^*} > 0$, *то* $\hat{u}(t)$ *удовлетворяет условию Гельдера по* t *с показателем* $\min\left(\frac{1}{p-1},\, \frac{1}{3-p}\right)$.

Васильева Анастасия Андреевна
Московский государственный ун-т
Россия, Москва
e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

ИНДИКАТОРНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ СЕРИЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ [1]

© Н. Б. Волотова

Желобенко [1, гл. X] предъявил системы уравнений (*индикаторные системы*), выделяющие конечномерные представления комплексной линейной группы $\mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$, содержащиеся в основной *невырожденной* серии представлений этой группы.

Мы рассматриваем аналогичные представления, содержащиеся в *вырожденной* серии представлений группы $\mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$, отвечающей разбиению $n = 1 + (n-1) + 1$ числа n. Они реализуются в многочленах на подгруппе Z нижних унипотентных блочных матриц. Заметим, что группа Z есть группа Гейзенберга размерности $2n - 3$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 05-01-00074-а, № 06-06-96318 р_центр_а, № 07-01-91209 ЯФ_а), научной программы «Развитие Научного Потенциала Высшей Школы» РНП. 2.1.1.351 и темплана № 1.2.02.

Будем записывать матрицы g из $G = \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ в блочном виде соответственно разбиению $n = 1 + (n-1) + 1$. Рассмотрим подгруппы Z и B группы G, состоящие соответственно из матриц

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & E & 0 \\ c & s & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} p & * & * \\ 0 & q & * \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где s — вектор-строка из $\mathbb{R}^{n-2}$, t — вектор-столбец из $\mathbb{R}^{n-2}$, c — число из $\mathbb{R}$, p, r — числа из $\mathbb{R}^*$, q — матрица из $\mathrm{GL}(\mathrm{n}-2, \mathbb{R})$. Матрица, обратная матрице z, есть

$$z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & E & 0 \\ \widehat{c} & -s & 1 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{c} = st - c$. Пусть dz обозначает инвариантную меру на Z:

$$dz = dc\, ds_2 \dots ds_{n-1}\, dt_2 \dots dt_{n-1}.$$

Почти всякую матрицу $g \in G$ можно записать в виде произведения: $g = bz$ (разложение Гаусса).

Пусть $S(Z)$ — пространство многочленов на Z. Представление T_m, $m = 0, 1, \dots$, группы G действует в некотором подпространстве V_m пространства $S(Z)$, см. ниже, по формуле

$$\left(T_m(g) f\right)(z) = f(\widetilde{z}) \Big(\widetilde{r}/\widetilde{p}\Big)^m.$$

где $\widetilde{z}$, $\widetilde{r}$, $\widetilde{p}$ находятся из разложения Гаусса матрицы zg: $zg = \widetilde{b}\widetilde{z}$. Пространство V_m содержит тождественную единицу 1 в качестве циклического вектора. Представление T_m неприводимо, его старший вектор есть $(c\widehat{c})^m$, младший вектор есть 1, старший вес есть $(m, 0, \dots, 0, -m)$, размерность равна

$$d_m = \frac{2m + n - 1}{n - 1} \binom{m + n - 2}{m}^2.$$

Пусть E_{ij} обозначает «матричную единицу», это матрица, в которой на месте (i, j) стоит 1, а на остальных местах стоят нули.

В алгебре Ли группы Z матрицы E_{i1}, E_{ni}, $i = 2, \dots, n-1$, являются образующими. Инфинитезимальные операторы левых сдвигов на группе Z, отвечающих этим матрицам, — это дифференциальные операторы

$$L_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad D_i = t_i \frac{\partial}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial s_i}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Рассмотрим в пространстве $S(Z)$ систему уравнений

$$L_i^{m+1} f = 0, \quad D_i^{m+1} f = 0, \quad i = 2, \dots, n-1. \tag{2}$$

Назовем ее, следуя Желобенко, *индикаторной системой.*

Т е о р е м а. *Пространство V_m есть в точности пространство решений системы* (2).

Одним из основных шагов в доказательстве теоремы служит интегральное представление многочленов из V_m:

$$f(z) = \int_Z K(z, \zeta)^m F(\zeta)\, d\zeta,$$

здесь F — обобщенная функция на группе Z, сосредоточенная в единице E, в этой точке $c = 0$, $s = 0$, $t = 0$. Функция $K(z, \zeta)$, $z, \zeta \in Z$, имеет следующее выражение: пусть z имеет параметры c, s, t, см. (1), а ζ имеет параметры a, u, v, пусть J — диагональная матрица порядка $n-2$ с диагональю $\{-1, 1, \ldots, 1\}$, тогда

$$K(z, \zeta) = (1 - sJv + c\widehat{a})(1 - uJt + a\widehat{c}).$$

В частности, дельта-функция $\delta(z)$, сосредоточенная в точке E, переходит в 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.

Волотова Надежда Борисовна
Тамбовский государственный ун-т
Россия, Тамбов
e-mail: volotova@tsu.tmb.ru

Поступила в редакцию 10 мая 2007 г.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

© **Н. Г. Главнов**

Будем рассматривать линейную нестационарную систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \ u \in U = [-1, 1], \tag{1}$$

(с одним входом и n выходами, $n \geqslant 2$) и достаточно гладкими $A(t)$ и $b(t)$.

Определение 1. *Функцией быстродействия* системы (1) называется функция $(t, x) \to \tau_n(t_0, x_0) = \min\limits_{u(\cdot) \in U} \{\vartheta \geqslant 0 : x(t_0 + \vartheta, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\}$, где $x(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (1) при управлении $u = u(t)$. Если для некоторой точки (t_0, x_0) не существует допустимого управления, то будем полагать, что $\tau_n(t_0, x_0) = \infty$.

Определение 2. *Множеством управляемости системы* (1) *на отрезке* $[t_0, \, t_0 + \vartheta]$ называется множество $D_\vartheta(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \tau_n(t_0, x) \leqslant \vartheta\}$, а *множеством управляемости* — множество $D(t_0) \doteq \bigcup\limits_{\vartheta \geqslant 0} D_\vartheta(t_0)$.

Определим функции $t \to q_i(t)$, равенствами $q_1(t) = b(t), \ldots, q_i(t) = \dot{q}_{i-1} - A(t)q_{i-1}(t)$, $i = 1, \ldots, n+1$. Будем предполагать, что они непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Для формулировки основного результата построим полином

$$l(t, \lambda) = p_n(t)\lambda^n + p_{n-1}(t)\lambda^{n-1} + \cdots + p_1(t)\lambda + p_0(t), \tag{2}$$