УДК 517.935

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНВАРИАНТНЫХ И УСТОЙЧИВО ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© **Е.А. Панасенко**

Ключевые слова: дифференциальное включение; инвариантное множество; слабо инвариантное множество; устойчиво инвариантное множество; функции Ляпунова.

В работе обобщены результаты по теории инвариантных и устойчиво инвариантных множеств дифференциальных включений. Рассмотрены условия (в терминах функций Ляпунова), при которых заданное множество обладает свойством инвариантности или слабой инвариантности, а также различного рода устойчивостью относительно решений неавтономного дифференциального включения с замкнутозначной правой частью.

В работе изложены результаты исследований последних лет (см. [1], [2]) в теории инвариантности и устойчивой инвариантности многозначных дифференциальных систем. Известные результаты А.М. Ляпунова, Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского в качественной теории дифференциальных уравнений распространены на дифференциальные включения вида

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1}$$

где многозначное отображение $F : \mathbb{R}^{1+n} \multimap \mathbb{R}^n$ имеет замкнутые (не обязательно компактные) образы. При этом в качестве положения равновесия рассматривается не отдельное решение, а целое множество в расширенном фазовом пространстве.

1. Метрика Хаусдорфа-Бебутова. Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\varrho(x, M) \doteq \min\limits_{y\in M} |x - y|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества M в $\mathbb{R}^n$. Через $O_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$ обозначим замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Далее, если M — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{cl} M$ (или $\overline{M}$) — замыкание, $\operatorname{fr} M$ — граница, $\operatorname{int} M$ — внутренность, $\operatorname{co} M$ — выпуклая оболочка множества M относительно пространства $\mathbb{R}^n$.

Пространство непустых *компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ обозначим $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, а подпространство в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых* компактных подмножеств, обозначим через $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$. Пространства $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ будем рассматривать с метрикой Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}, \tag{2}$$

где $d(A, B) \doteq \max\limits_{a\in A} \varrho(a, B)$ — *полуотклонение* множества A от множества B. Как известно, в метрике Хаусдорфа $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ являются полными метрическими пространствами. Далее, множество всех непустых *замкнутых* (не обязательно ограниченных) подмножеств в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, а подмножество в $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых* замкнутых подмножеств — через $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Пространства $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n), \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ можно также рассматривать с метрикой Хаусдорфа (заменив в формуле полуотклонения $\max$ на $\sup$), однако в этом случае расстояние между неограниченными замкнутыми множествами как правило бесконечно, а это автоматически исключает из рассмотрения ряд важных задач, связанных с управляемыми системами. Поэтому мы введем новую метрику в пространствах $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, которую назовем метрикой Хаусдорфа–Бебутова [3], [2].

Для каждого F из $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ построим множество $m(F) \doteq \left\{ f \in F : \min\limits_{f \in F} |f| \right\}$ и множество $m^r(F)$ точек, отстоящих от множества $m(F)$ не более чем на расстояние r. Пусть далее $F, G \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$; для любого $r > 0$ обозначим $F_r \doteq F \bigcap m^r(F)$, $G_r \doteq G \bigcap m^r(G)$, найдем полуотклонения $d_r(F,G) \doteq d(F_r, G_r)$, $d_r(G,F) \doteq d(G_r, F_r)$, расстояние по Хаусдорфу $\operatorname{dist}_r(F,G) \doteq \operatorname{dist}(F_r, G_r)$, полуотклонения Хаусдорфа–Бебутова

$$D(F,G) = \sup_{r>0} \min\Big\{ d_r(F,G),\ r^{-1} \Big\}, \quad D(G,F) = \sup_{r>0} \min\Big\{ d_r(G,F),\ r^{-1} \Big\} \tag{3}$$

и метрику Хаусдорфа–Бебутова

$$\operatorname{Dist}(F,G) = \max\big\{ D(F,G),\, D(G,F) \big\}. \tag{4}$$

Очевидно, что определение (4) можно заменить равносильным

$$\operatorname{Dist}(F,G) = \sup_{r>0} \min\Big\{ \operatorname{dist}_r(F,G),\ r^{-1} \Big\}. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что расстояние (4) удовлетворяет всем аксиомам метрики и для любой пары замкнутых множеств есть величина конечная.

П р и м е р 1. Найдем расстояние по Хаусдорфу–Бебутову между двумя лучами l_1 и l_2 в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Обозначим $\alpha \doteq \measuredangle(l_1, l_2)$ и предположим сначала, что $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Вычислим $D(l_1, l_2)$. Для любого $r > 0$ получаем $d_r(l_1, l_2) = \max\limits_{x \in l_1 \cap O_r} \varrho(x, l_2 \cap O_r) = r \sin\alpha$. Далее, из равенства $r \sin\alpha = r^{-1}$ находим $r = (\sin\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ и $D(l_1, l_2) = \sqrt{\sin\alpha}$. Аналогично, $D(l_2, l_1) = \sqrt{\sin\alpha}$. Таким образом, $\operatorname{Dist}(l_1, l_2) = \sqrt{\sin\alpha}$. Для случая $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ получаем $D(l_1, l_2) = D(l_2, l_1) = 1$. То есть, $\operatorname{Dist}(l_1, l_2) = 1$.

Л е м м а 1. *В метрике Хаусдорфа–Бебутова пространство* $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *замкнутых выпуклых подмножеств из* $\mathbb{R}^n$ *является полным метрическим пространством.*

Пусть $F(t,x)$ — функция переменных $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ со значениями в $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$. F назовем *полунепрерывной сверху в точке* (t_0, x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(t,x) \in O_\varepsilon(t_0, x_0)$ полуотклонение $D(F(t,x), F(t_0,x_0))$ не превосходит ε. Далее, функция F называется *полунепрерывной снизу в точке* (t_0, x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $D(F(t_0,x_0), F(t,x)) \leqslant \varepsilon$ для всех $(t,x) \in O_\varepsilon(t_0, x_0)$. Если F полунепрерывна сверху (или снизу) в каждой точке (t_0, x_0) открытого множества $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, то она называется *полунепрерывной сверху* (соответственно, *снизу*) *на множестве* G. Функция $(t,x) \to \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, одновременно полунепрерывная сверху и снизу на множестве G называется *непрерывной* на G. Следует отметить, что непрерывность функции в метрике Хаусдорфа–Бебутова и непрерывность в метрике Хаусдорфа есть понятия независимые.

2. Равномерная устойчивость по Ляпунову. Рассмотрим теперь дифференциальное включение (1). Под решением включения на интервале $J \subset \mathbb{R}$ будем понимать решение Каратеодори, т. е. всякую абсолютно непрерывную функцию $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$ такую, что включение $\dot\varphi(t) \in F\big(t, \varphi(t)\big)$ выполнено при почти всех $t \in J$. Функцию $t \to \varphi(t)$, удовлетворяющую условию $\varphi(t_0) = x_0$, будем называть *локальным решением* включения (1), если найдется такая окрестность J точки t_0, что φ является решением включения (1) на J. Пусть, далее, множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение

$$M(t) \doteq \{ x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in \mathcal{M} \}$$

множества $\mathcal{M}$ непусто. Построим замкнутую окрестность $\mathcal{M}^r \doteq \overline{\mathcal{M}} + O_r$ множества $\mathcal{M}$ в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ и внешнюю r-окрестность $\mathcal{N}^r_+ \doteq \mathcal{M}^r \setminus \overline{\mathcal{M}}$ границы $\operatorname{fr}\mathcal{M}$ множества $\mathcal{M}$.

Очевидно, что $\mathcal{M}^r \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^{1+n})$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ множество $M^r(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in \mathcal{M}^r\}$ замкнуто. Всюду далее будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1. Найдется такое $r > 0$, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}^r$ существует локальное решение $\varphi(t)$ включения (1), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$. Кроме того, если $\varphi\colon [t_0,\tau) \to \mathbb{R}^n$ — решение дифференциального включения (1), то всегда предполагается, что полуинтервал $[t_0,\tau)$, где $\tau = \tau(t_0,\varphi)$, является правым максимальным полуинтервалом существования решения $t \to \varphi(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Для выполнения условия 1 достаточно, чтобы функция $F : \mathbb{R}^{1+n} \to \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ была полунепрерывной снизу или имела выпуклые образы и была полунепрерывной сверху.

О п р е д е л е н и е 1. Множество $\mathcal{M}$ будем называть *равномерно* (по начальному моменту времени t_0) *устойчивым* по Ляпунову *относительно включения* (1), если для некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0,r)$ найдется такое $\delta \in (0,\varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и любого решения $t \to \varphi(t)$ включения (1), из условия $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}^\delta_+$ следует, что $(t,\varphi(t)) \in \mathcal{M}^\varepsilon$, $t \in [t_0,\tau)$.

Если в определении 1 слова «любого решения $t \to \varphi(t)$ включения (1)» заменить на слова «найдется решение $t \to \varphi(t)$ включения (1)», то множество $\mathcal{M}$ называется *слабо равномерно устойчивым относительно включения* (1).

П р и м е р 2. Множество $\mathcal{M} \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^3\colon\, t \in \mathbb{R},\, x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2,\, x_2 \geqslant 0\}$ равномерно устойчиво относительно дифференциального включения, отвечающего управляемой системе на плоскости

$$\dot{x}_1 = 1,\ \dot{x}_2 = u(1 + x_2^2), \quad u \in [0,1]. \tag{6}$$

Любая траектория, берущая начало в ε-окрестности множества $\mathcal{M}$, эту окрестность не покидает. Причем, среди таких траекторий есть траектории, соответствующие решениям с конечным временем существования (например, $x(t) = (t, \operatorname{tg} t)$ при $u \equiv 1$).

Множество

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M, \quad \text{где} \quad M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2\colon\, x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2,\, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\},$$

в свою очередь, является лишь слабо равномерно устойчивым относительно системы (6). Среди решений соответствующего включения есть такие, которые начинаются в M и покидают его через верхнюю границу $P \doteq \bigl\{(x_1, \operatorname{tg} x_1),\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \pi/4\bigr\} \bigcup \{(x_1,1),\, x_1 > \pi/4\}$, но есть также решение $x(t) = (t,1)$ (отвечающее управлению $u = 0$), которое остается в M при всех $t \geqslant \pi/4$.

С точки зрения задач управления и дифференциальных игр, свойство слабой равномерной устойчивости и рассматриваемое ниже свойство слабой равномерной асимптотической устойчивости представляют наибольший интерес.

О п р е д е л е н и е 2. Непрерывную функцию $V : \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ будем называть *функцией Ляпунова* (на множестве $\mathcal{M}^r$), если $V(t,x) = 0$ при $(t,x) \in \overline{\mathcal{M}}$ и $V(t,x) > 0$ при $(t,x) \in \mathcal{N}^r_+$.

Предположение о равенстве нулю функции V на множестве $\mathcal{M}$ не уменьшает общности дальнейших рассуждений.

О п р е д е л е н и е 3. Функцию Ляпунова $V : \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ назовем *определенно положительной* (на множестве $\mathcal{M}^r$), если для всякого $\varepsilon \in (0,r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t,x) \geqslant \delta$ при всех $(t,x) \in \operatorname{fr}\mathcal{M}^\varepsilon$.

Если функция $(t,x) \to V(t,x)$ локально липшицева, то для любого вектора $h = (\tau, q)$ из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и всякой точки $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ существует конечный предел

$$V^o(t,x;h) \doteq \limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(t,x,+0)} \frac{V(\vartheta + \varepsilon\tau, y + \varepsilon q) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon},$$

называемый *обобщенной производной (или производной Ф. Кларка) функции* V *по направлению вектора* h *в точке* (t,x). Через $V^o(t,x;q)$ будем обозначать производную функции V в точке (t,x) по направлению вектора $h=(1,q)$, $q\in\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 1. *Пусть существуют локально липшицева определенно положительная функция Ляпунова* $V:\mathcal{M}^r\to\mathbb{R}$ *и непрерывная функция* $w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *такие, что*:
1) *для любого* $q\in F(t,x)$ *и всех* $(t,x)\in\overline{\mathcal{N}^r_+}$ *имеет место неравенство*

$$V^o(t,x;q)\leqslant w(t,V(t,x));$$

2) $w(t,0)\equiv 0$, *уравнение*

$$\dot z=w(t,z) \tag{7}$$

обладает свойством единственности решения задачи Коши, и тривиальное решение уравнения (7) *равномерно устойчиво по Ляпунову* (*в классическом смысле*).

Тогда множество $\mathcal{M}$ *равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения* (1).

Т е о р е м а 2. *Пусть существуют локально липшицева определенно положительная функция Ляпунова* $V:\mathcal{M}^r\to\mathbb{R}$ *и непрерывная функция* $w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *такие, что*:
1) *множество*

$$Q(t,x)\doteq\{q\in F(t,x):V^o(t,x;q)\leqslant w(t,V(t,x))\}$$

непусто при всех $(t,x)\in\mathcal{M}^r$, *и для любой точки* $(t_0,x_0)\in\mathcal{M}^r$ *включение*

$$\dot x\in Q(t,x) \tag{8}$$

имеет локальное решение с начальным условием $x(t_0)=x_0$;
2) $w(t,0)\equiv 0$, *уравнение* (7) *обладает свойством единственности решения задачи Коши, и его тривиальное решение равномерно устойчиво по Ляпунову.*

Тогда множество $\mathcal{M}$ *слабо равномерно устойчиво относительно включения* (1).

Условия существовании локальных решений включения (8) дает следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Если функция* $(t,x)\to F(t,x)$ *имеет замкнутые выпуклые образы и полунепрерывна сверху, то при всех* $(t_0,x_0)\in\mathcal{M}^r$ *существует локальное решение включения* (8), *удовлетворяющее начальному условию* $x(t_0)=x_0$.

О п р е д е л е н и е 4. Множество $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^{1+n}$ называется *положительно инвариантным* (относительно включения (1)), если для любой начальной точки $(t_0,x_0)\in\mathcal{M}$ каждое решение $\varphi\colon[t_0,\tau)\to\mathbb{R}^n$ включения (1) с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ удовлетворяет при всех $t\in[t_0,\tau)$ включению $(t,\varphi(t))\in\mathcal{M}$.

О п р е д е л е н и е 5. Множество $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^{1+n}$ называется *слабо положительно инвариантным* относительно дифференциального включения (1), если для любой точки (t_0,x_0) множества $\mathcal{M}$ найдется решение $\varphi\colon[t_0,\tau)\to\mathbb{R}^n$ включения (1) с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$, удовлетворяющее при всех $t\in[t_0,\tau)$ включению $(t,\varphi(t))\in\mathcal{M}$.

С л е д с т в и е 1. Если множество $\mathcal{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения (1), то замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$ положительно инвариантно, и любое решение, выходящее из точки $(t_0,x_0)\in\mathcal{M}$, бесконечно продолжаемо вправо.

С л е д с т в и е 2. Если множество $\mathcal{M}$ слабо равномерно устойчиво относительно включения (1), то замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$ слабо положительно инвариантно, и из любой точки $(t_0,x_0)\in\mathcal{M}$ выходит хотя бы одно решение, бесконечно продолжаемое вправо.

3. Динамическая система сдвигов. Рассмотрим далее случай, когда правую часть включения (1) определяет функция $(t,x)\to F(t,x)\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, а множество $\mathcal{M}$ представляет собой график функции $M:\mathbb{R}\to\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, то есть $\mathcal{M}=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}:x\in M(t)\}$.

Построим семейство $\operatorname{orb}(F) \doteq \{F_\tau : \tau \geqslant 0\}$ функций $F_\tau(t,x) \doteq F(t+\tau, x)$ и замыкание $\overline{\operatorname{orb}}(F)$ семейства $\operatorname{orb}(F)$ в метрике Бебутова

$$\rho_B(F^1, F^2) = \sup_{r>0} \min\Big\{ \max_{(t,x)\in O_r} \operatorname{Dist}(F^1(t,x), F^2(t,x)),\, r^{-1} \Big\}, \tag{9}$$

где O_r — замкнутый шар радиуса r в $\mathbb{R}^{1+n}$ с центром в нуле. В силу определения (9), включение $\widehat{F} \in \overline{\operatorname{orb}}(F)$ имеет место в том и только в том случае, если найдётся такая последовательность $\{t_i\}$, $t_i \geqslant 0$, что каждому $\varepsilon > 0$, любому $\vartheta > 0$ и любому $K \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ отвечает номер i_0 начиная с которого $\operatorname{Dist}(F_{t_i}(t,x), \widehat{F}(t,x)) \leqslant \varepsilon$ при всех $t \in [-\vartheta, \vartheta]$, $x \in K$. Тогда на множестве $\Sigma \doteq \overline{\operatorname{orb}}(F)$ можно определить полупоток $h^\tau : \Sigma \to \Sigma$ $(\tau \geqslant 0)$ равенством $h^\tau \widehat{F} \doteq \widehat{F}_\tau$ и получить динамическую систему сдвигов (Σ, h^τ) [5], [6]. Напомним, что Σ в этом случае называется *фазовым пространством*, а $\operatorname{orb}(F)$ — *положительной полутраекторией движения* h^τ.

Динамическую систему сдвигов мы можем построить и для функции

$$(t,x) \to H(t,x) \doteq (F(t,x), M(t)) \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n).$$

В этом случае метрика $\rho_B(H^1, H^2)$ определяется равенством (9), где

$$\operatorname{Dist}\big(H^1(t,x), H^2(t,x)\big) = \operatorname{Dist}\big(F^1(t,x), F^2(t,x)\big) + \operatorname{dist}\big(M^1(t), M^2(t)\big),$$

а полупоток h^τ — равенством $h^\tau \widehat{H} = (\widehat{F}_\tau, \widehat{M}_\tau)$, где $\widehat{H} \in \overline{\operatorname{orb}}(H)$. Несложно проверить (см. [3], [5]), что справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Если функция $t \to H(t,x)$ непрерывна при каждом x, а функция $x \to F(t,x)$ полунепрерывна сверху при каждом t, то фазовое пространство $\overline{\operatorname{orb}}(H)$ динамической системы $(\overline{\operatorname{orb}}(H), h^\tau)$ является полным метрическим пространством.*

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями $\widehat{M}{}^{\delta}_{+}(0)$, $\widehat{N}{}^{\delta}_{+}(0) \doteq \widehat{M}{}^{\delta}_{+}(0) \setminus \widehat{M}(0)$, $\widehat{\mathcal{M}}^\varepsilon$, $\widehat{\mathcal{N}}^\delta_+$ и др., смысл которых понятен из контекста.

Определения равномерной устойчивости и слабой равномерной устойчивости множества $\mathcal{M}$ относительно включения

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{10}$$

можно теперь переформулировать в терминах динамической системы сдвигов.

О п р е д е л е н и е 6. Множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно устойчивым* по Ляпунову *относительно включения* (10), если для каждой пары $\widehat{H} = (\widehat{F}, \widehat{M}) \in \overline{\operatorname{orb}}(H)$, некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для всякой точки $x_0 \in \widehat{N}{}^{\delta}_{+}(0)$ и любого решения $t \to \varphi(t, x_0)$ задачи

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x), \quad x(0) = x_0, \tag{11}$$

при всех $t \in [0, \tau)$ имеет место включение $(t, \varphi(t, x_0)) \in \widehat{\mathcal{M}}^\varepsilon$.

Если в этом определении слова «любого решения $t \to \varphi(t, x_0)$ задачи (11)» заменить на слова «найдется решение $t \to \varphi(t, x_0)$ задачи (11)», то указанное свойство будет называться *слабой равномерной устойчивостью множества* $\mathcal{M}$ относительно включения (10).

Напомним далее, что функция $H(t,x) = (F(t,x), M(t))$ переменных (t,x) называется *равномерно непрерывной по t равномерно относительно x на компактах в* $\mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $K \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $|\tau| \leqslant \delta$, всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $x \in K$ выполнено неравенство $\operatorname{Dist}(H_\tau(t,x), H(t,x)) \leqslant \varepsilon$. Функцию $(t,x) \to H(t,x)$ будем называть *ограниченной* по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при каждом x, если выполнено неравенство $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} p(t,x) < \infty$, где $p(t,x) = |H(t,x)| \doteq \operatorname{Dist}(H(t,x), \{0\})$.

Имеет место следующее утверждение, аналогичное теореме 1 работы [3].

Л е м м а 3. *Если функция* $(t,x) \to H(t,x) \doteq (F(t,x), M(t)) \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ *равномерно непрерывна по* t *равномерно относительно* x *на компактах в* $\mathbb{R}^n$ *и при каждом* x *ограничена по* t *на числовой прямой* $\mathbb{R}$, *то замыкание* $\overline{\operatorname{orb}}(H)$ *траектории* $\operatorname{orb}(H)$ *компактно.*

4. Равномерная асимптотическая устойчивость.

О п р е д е л е н и е 7. Множество $\mathcal{M} \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} : x \in M(t)\}$ назовем *слабо асимптотически устойчивым* относительно включения (10), если оно слабо устойчиво в смысле определения 1, и для некоторого $r > 0$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется такое решение $\varphi\colon [t_0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (10), что $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^r$ и

$$\lim_{t \to \tau - 0} \varrho(\varphi(t), M(t)) = 0. \tag{12}$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ назовем *равномерно асимптотически устойчивым* относительно включения (10), если оно равномерно устойчиво в смысле определения 1, и для некоторого $r > 0$, любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и каждого решения $\varphi\colon [t_0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (10), удовлетворяющего условию $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^r$, имеет место равенство (12).

Это определение можно сформулировать в терминах динамической системы сдвигов.

О п р е д е л е н и е 8. Пусть $H(t,x) = (F(t,x), M(t))$. Множество $\mathcal{M}$ называется *слабо асимптотически устойчивым* относительно включения (10), если оно слабо устойчиво и для некоторого $r > 0$, и каждого $\widehat{H} \in \overline{\operatorname{orb}}(H)$ найдется решение $\varphi\colon [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x), \tag{13}$$

такое, что $(0, \varphi(0)) \in \widehat{\mathcal{N}}_+^r$ и

$$\lim_{t \to \tau - 0} \varrho(\varphi(t), \widehat{M}(t)) = 0. \tag{14}$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно асимптотически устойчивым* относительно включения (10), если оно равномерно устойчиво и для некоторого $r > 0$, каждого $\widehat{H} \in \overline{\operatorname{orb}}(H)$, и всякого решения $\varphi\colon [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (13), удовлетворяющего условию $(0, \varphi(0)) \in \widehat{\mathcal{N}}_+^r$, следует равенство (14).

Переход к определениям 7, 8 и использование динамической системы сдвигов позволяет сформулировать и доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция* $(t,x) \to F(t,x)$ *со значениями в* $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху и* $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |F(t,x)| < \infty$ *при каждом* x, *а функция* $t \to M(t) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ *равномерно непрерывна и* $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |M(t)| < \infty$. *Предположим далее, что существуют число* $r > 0$ *и ограниченная и равномерно непрерывная по* t *равномерно относительно* (x,z) *на компактах в* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *функция* $(t,x,z) \to W(t,x,z) \doteq (V(t,x), w(t,z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *такие, что:*
1) *функция* $V : \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ *является локально липшицевой определенно положительной функцией Ляпунова;*
2) *множество* $Q(t,x)$, *определенное равенством*

$$Q(t,x) = \{q \in F(t,x)\colon V^o(t,x;q) \leqslant w(t, V(t,x))\}, \tag{15}$$

непусто при всех $(t,x) \in \mathcal{M}^r$, *и функция*

$$(t,x) \to S(t,x) \doteq Q(t,x) \bigcap O_p, \quad \text{где} \quad p = \sup_{(t,x) \in \mathcal{M}^r} |Q(t,x)|, \tag{16}$$

равномерно непрерывна по t *равномерно относительно* x *на компактах в* $\mathbb{R}^n$;
3) $w(t,0)\equiv 0$, *уравнение*

$$\dot{z}=w(t,z) \tag{17}$$

обладает свойством единственности решения задачи Коши, и тривиальное решение уравнения (17) *равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Тогда множество $\mathcal{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно включения* (10).

Пусть, далее, $V\colon \mathcal{M}^r\to\mathbb{R}$ — некоторая функция Ляпунова. Построим множество

$$\mathcal{Q}(t,x)=\{q\in F(t,x)\colon\ V^o(t,x;q)\leqslant 0\} \tag{18}$$

и, в предположении, что множество (18) непусто, при всех $(t,x)\in\mathcal{M}^r$, построим вспомогательное дифференциальное включение

$$\dot{x}\in\mathcal{S}(t,x)\doteq\mathcal{Q}(t,x)\bigcap O_p,\quad p=\sup_{(t,x)\in\mathcal{M}^r}|\mathcal{Q}(t,x)|. \tag{19}$$

По функции $(t,x)\to H(t,x)=(\mathcal{S}(t,x),M(t),V(t,x))$ построим динамическую систему сдвигов $(\overline{\mathrm{orb}}(H),h^\tau)$ и для каждого $\alpha\geqslant 0$ и любого $\widehat{H}\in\overline{\mathrm{orb}}(H)$ введем в рассмотрение *поверхность уровня* $L_\alpha(\widehat{V})$ функции $\widehat{V}$:

$$L_\alpha(\widehat{V})\doteq\{(t,x)\in\widehat{\mathcal{N}}^r_+ : \widehat{V}(t,x)=\alpha\}. \tag{20}$$

О п р е д е л е н и е 9. Будем говорить [7], что множество (20) *не содержит положительных полутраекторий* включения

$$\dot{x}\in\widehat{\mathcal{S}}(t,x), \tag{21}$$

если для любой начальной точки $x_0\in\widehat{N}^r_+(0)$ и каждого решения $\varphi(t)$ включения (21), удовлетворяющего условию $\varphi(0)=x_0$, найдется момент времени $t_1>0$ такой, что $\big(t_1,\varphi(t_1)\big)\notin L_\alpha(\widehat{V})$.

То есть, $L_\alpha(\widehat{V})$ не содержит положительных полутраекторий включения (21), если всякое решение, начинающееся в $L_\alpha(\widehat{V})$, покидает $L_\alpha(\widehat{V})$ за конечное время.

В дальнейшем будем предполагать, что функция Ляпунова $V(t,x)$ *локально липшицева по* x *равномерно относительно* t *на* $\mathbb{R}$, т. е. найдется такая, не зависящая от t, константа ℓ, что для любой пары точек $(t,x_1),(t,x_2)\in\mathcal{N}^r_+$ выполнено неравенство $|V(t,x_1)-V(t,x_2)|\leqslant\ell|x_1-x_2|$. Следующая теорема является аналогом теоремы Барбашина и Красовского для дифференциальных уравнений.

Т е о р е м а 5. *Пусть функция* $t\to M(t)\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ *ограничена и равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$. *Пусть далее, существует такое число* $r>0$, *что функция* $F:\mathcal{M}^r\to\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху и* $\sup\limits_{(t,x)\in\mathcal{M}^r}|F(t,x)|<\infty$. *Если существует ограниченная по* t *равномерно относительно* x, *локально липшицева по* x *равномерно относительно* t *функция Ляпунова* $V\colon\mathcal{M}^r\to\mathbb{R}$ *такая, что при всех* $(t,x)\in\mathcal{M}^r$ *множество* (18) *непусто и для любого* $\alpha\in(0,r)$ *и всех* $\widehat{H}\in\overline{\mathrm{orb}}(H)$, *где* $H=(\mathcal{S},M,V)$, *множество* (20) *не содержит положительных полутраекторий включения* (21), *то множество* $\mathcal{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно включения* (10).

5. Слабая устойчивость в целом. Рассмотрим теперь условия слабой устойчивости в целом множества $\mathcal{M}$ относительно дифференциального включения (10).

О п р е д е л е н и е 10. Множество $\mathcal{M} \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}: \ x \in M(t)\}$ назовем *слабо устойчивым в целом* относительно включения

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{22}$$

если оно слабо устойчиво, и для любой точки (t_0, x_0) *найдется* определенное при всех $t \geqslant t_0$ решение $\varphi(t)$ включения (22) такое, что $\varphi(t_0) = x_0$ и

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(\varphi(t), M(t)) = 0. \tag{23}$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ назовем *равномерно устойчивым в целом* относительно включения (22), если оно равномерно устойчиво, и *каждое* решение включения (22) определено при всех $t \geqslant t_0$ и имеет место равенство (23).

В терминах динамической системы сдвигов это определение приобретает следующий вид.

О п р е д е л е н и е 11. Пусть $H(t,x) = (F(t,x), M(t))$. Множество $\mathcal{M}$ называется *слабо устойчивым в целом* относительно включения (22), если оно слабо устойчиво, и для любой точки x_0 и каждого $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$ найдется определенное при всех $t \geqslant 0$ решение $\varphi(t)$ включения

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x), \tag{24}$$

такое, что $\varphi(0) = x_0$ и

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(\varphi(t), \widehat{M}(t)) = 0. \tag{25}$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно устойчивым в целом* относительно включения (22), если оно равномерно устойчиво и для каждого $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$ всякое решение $\varphi(t)$ включения (24) определено при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условию (25).

О п р е д е л е н и е 12. Функция $V : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно большой* (относительно множества $\mathcal{M}$), если для любого $R > 0$ найдется такое $r > 0$, что для всех $(t,x) \notin \mathcal{M}^r$ выполнено неравенство $V(t,x) \geqslant R$.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция $t \to M(t) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $(t,x) \to F(t,x)$ со значениями в $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху и ограничена по t на $\mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть, далее, существует ограниченная по t при каждом x, локально липшицева по x равномерно относительно t бесконечно большая функция Ляпунова $V(t,x)$ такая, что при всех (t,x) множество $\mathcal{Q}(t,x) = \{q \in F(t,x)\colon V^o(t,x;q) \leqslant 0\}$ непусто. Предположим, что для каждой точки (t_0,x_0) включение*

$$\dot{x} \in \mathcal{S}(t,x) \doteq \mathcal{Q}(t,x) \bigcap O_{p(t,x)}, \quad p(t,x) = |\mathcal{Q}(t,x)|, \tag{26}$$

имеет локальное решение, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, и для любого $\alpha > 0$ и всех $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$, где $H = (\mathcal{S}, M, V)$, множество $L_\alpha(\widehat{V}) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}\colon \widehat{V}(t,x) = \alpha\}$ не содержит положительных полутраекторий включения (26).

Тогда множество $\mathcal{M}$ слабо устойчиво в целом относительно включения (22).

П р и м е р 3. Пусть $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2\colon x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2, \, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$. Множество $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$ является слабо устойчивым в целом относительно системы

$$\dot{x}_1 = 1, \ \dot{x}_2 = u(1 + x_2^2), \quad u \in [-\delta, 1], \tag{27}$$

где $\delta > 0$. Для проверки воспользуемся теоремой 6. Для этого от системы (27) перейдем к уравнению $\dot{y} = u(1 + y^2)$. Тогда множество $\mathcal{M}$ запишется в виде

$$\mathcal{M} = \{(t,y)\colon t \geqslant \operatorname{arctg} y, \, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Пусть $V(t,y)$ — расстояние от точки (t,y) до множества $\mathcal{M}$. Тогда $V(t,y)$ определенно положительна, бесконечно большая, дифференцируема в каждой точке $(t,y) \notin \mathrm{fr}\mathcal{M}$, и $\dot V(t,y;q) = V_t(t,y) + uV_y(t,y)(1+y^2)$. Из определения $V(t,y)$ следует, что при каждом $\alpha > 0$ для любой точки $(t,y) \in L_\alpha = \{(t,y)\colon V(t,y) = \alpha\}$, $V_t(t,y) \leqslant 0$, причем $V_t(t,y) = 0$ только при $(t,y) \in l_1 \bigcup l_2$, где $l_1 \doteq \{(t,y) : t \geqslant 0,\ y = -\alpha\}$, $l_2 \doteq \{(t,y)\colon t \geqslant \pi/4,\ y = 1+\alpha\}$. Кроме того, $V_y(t,y) < 0$ при $(t,y) \in l_1$ и $V_y(t,y) > 0$ при $(t,y) \in l_2$. Следовательно, если $(t,y) \in L_\alpha$ и $(t,y) \notin l_1 \bigcup l_2$, то $\dot V(t,y;q) < 0$ при $u = 0$, если $(t,y) \in l_1$, то $\dot V(t,y;q) < 0$ при всех $u \in (0,1]$ и если $(t,y) \in l_2$, то $\dot V(t,y;q) < 0$ при всех $u \in [-\delta, 0)$. Таким образом, все условия теоремы 6 выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панасенко Е.А., Тонков Е.А.* Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Тр. Ин-та Матем. и Механ. УрО РАН. 2009. Т. 15. №3. С. 185–201.

2. *Панасенко Е.А., Тонков Е.А.* Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

3. *Бебутов М.В.* О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюл. Механико-математического фак-та МГУ. 1941. № 5. С. 1–52.

4. *Roxin E.* Stability in general control systems // J. Different. Equat. 1965. V. 1. №2. P. 115–150.

5. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949.

6. Динамические системы–1 / Д.В. Аносов. [и др.] // Итоги науки и техники. Сер. «Совр. проблемы матем. Фундаментальные направления». М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. Т. 1.

7. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. 1952. Т. 86. № 6. С. 146–152.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 07-01-00305, № 09-01-97503), Министерства образования и науки РФ (программа Развитие научного потенциала высшей школы, проект № 2.1.1/1131).

Поступила в редакцию 10 ноября 2009 г.

Panasenko E.A. Elements of the theory of invariant and stably invariant sets for differential inclusions. In the work there are generalized the results on invariant and stably invariant sets for differential inclusions. There are considered the conditions (in the terms of Lyapunov functions) under which a given set is invariant, weakly invariant, or possesses the property of stability in this or that sense with respect to solutions of non-autonomous differential inclusion with closed-valued right-hand side.

Key words: differential inclusion; invariant set; weakly invariant set; stably invariant set; Lyapunov functions.