Key words: functional-differential inclusion, impulses, a-priori boundness, Cauchy problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* The differential equations with impulses. K.: High.school, 1987.

2. *Zavalischin S.T., Sesekin A.N.* Impulse processes. Models and applications. M.: Science, 1991.

3. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F.* Elements of theory of functional-differential equations. M.: High.school, 1987.

4. *Тихонов А.Н. Tichonov A.N.* On functional equations of Volterra type and it's applications to some problems of mathematical physics // Bulletin of Moscow University. Section A. 1938. № 8. V. 1. p. 1-25.

УДК 517.911/517.929

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ГЛОБАЛЬНЫХ И ПРЕДЕЛЬНО ПРОДОЛЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

© Е.О. Бурлаков

Предлагаются утверждения о непрерывной зависимости от параметров решений функционально-дифференциальных уравнений. Полученные результаты позволяют проверять корректность моделей, представимых дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Доказательства опираются на результаты работы [1].

Ключевые слова: управляемые системы с запаздыванием, непрерывная зависимость решений от параметров, локальная разрешимость задачи Коши, продолжение решений.

Полученные результаты позволяют проверять корректность моделей, представимых дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Доказательства опираются на результаты работы [1].

Обозначения: R^n – пространство векторов, имеющих n действительных компонент, с нормой $|\cdot|$; μ – мера Лебега на отрезке $[a,b]$; $L([a,b],\mu,R^n)$ – пространство измеримых суммируемых функций $y:\ [a,b]\to\ R^n$ с нормой $\|y\|_L=\int\limits_a^b|y(s)|ds$; $AC([a,b],\mu,R^n)$ – пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:\ [a,b]\to\ R^n$, что $\dot x\in L([a,b],\mu,R^n)$, с нормой $\|x\|_{AC}=|x(a)|+\|\dot x\|_L$.

Рассмотрим задачи Коши

$$\begin{gathered}\dot x(t)=f\big(t,x(t-\tau_1(t)),x(t-\tau_2(t)),\ldots,x(t-\tau_m(t)),u(t)\big),\ t\in[a,b],\\ x(\xi)=\varphi(\xi),\ \xi\notin[a,b],\\ x(a)=\alpha;\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{gathered}\dot x(t)=f_i\big(t,x(t-\tau_{1i}(t)),x(t-\tau_{2i}(t)),\ldots,x(t-\tau_{mi}(t)),u_i(t)\big),\ t\in[a,b],\\ x(\xi)=\varphi_i(\xi),\ \xi\notin[a,b],\\ x(a)=\alpha_i,\quad i=1,2,\ldots\ ,\end{gathered}\tag{1i}$$

где функции $\tau_j,\tau_{ji}:[a,b]\to[0,+\infty),\ j=1,2,\ \ldots,m;\ i=1,2,\ \ldots$ измеримы, функции $u,u_i:[a,b]\to R^k,\ i=1,2,\ \ldots$ измеримы и ограничены в существенном, функция $\varphi:(-\infty,a)\to R^n$ равномерно непрерывна и ограничена, функции $\varphi_i:(-\infty,a)\to R^n$ ограничены и $\mathfrak{B}$-измеримы при каждом i, функции $m+2$ аргументов $f,f_i:[a,b]\times R^n\times\ldots\times R^n\times R^k\to R^n$ при всех i удовлетворяют условиям Каратеодори:

k_1) при любых $x_j\in R^n,\ j=1,2,\ \ldots,m,\ u\in R^k$ функции $f(\ \cdot,x_1,x_2,\ldots,x_m,u)$ и $f_i(\ \cdot,x_1,x_2,\ldots,x_m,u)$ измеримы;

k_2) при почти всех $t\in[a,b]$ функции f,f_i непрерывны по совокупности 2-го, $\ldots$, $m+2$-го аргументов;

k_3) для любого числа $r>0$, существует такая суммируемая функция $g_r\in L([a,b],\mu,R^n)$, что для всех $u\in R^k,\ x_j\in R^n,\ j=1,2,\ \ldots,m$, удовлетворяющих условиям $|u|\le r,\ |x_j|\le r,\ j=1,2,\ \ldots,m$ выполнено $|f(t,x_1,x_2,\ldots,x_m,u)|\le g_r(t)$ при почти всех $t\in[a,b]$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\gamma\in(0,b-a)$, $\beta\in(0,b-a]$. *Локальным решением* задачи (1) определенным на $[a,a+\gamma]$, будем считать функцию $z_\gamma\in AC([a,a+\gamma],\mu,R^n)$, удовлетворяющую данному уравнению при почти всех $t\in\ [a,a+\gamma]$ и начальному условию.

Предельно продолженным решением задачи (1), определенным на $[a, a+\beta)$, будем считать функцию $z_\beta : [a, a+\beta) \to R^n$, сужение которой z_γ на $[a, a+\gamma]$ при всех $\gamma < \beta$ является локальным решением задачи (1) и $\lim\limits_{\gamma\to\beta-0} \int\limits_a^\gamma |\dot{x}_\gamma(s)|ds = \infty$. *Глобальным решением* задачи (1) назовем функцию $z \in AC([a,b], \mu, R^n)$, удовлетворяющую данному уравнению при почти всех $t \in [a, b]$ и начальному условию.

Приведенные определения будем, естественно, применять и к уравнениям $(1i)$.

Определим множества $M_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \{t \in [a,b] |\ t - \tau_j(t) = a,\ t - \tau_{ji}(t) < a\},\ i = 1, 2,\ \dots$.

Т е о р е м а 1. *Пусть при $i \to\ \infty$ выполнены следующие условия:*

1) $\mu(M_i) \to 0$, *либо* $\alpha = \varphi(a - 0)$*;*

2) *последовательность функций τ_{ji} сходится к функции τ_j по мере для всех $j = 1, 2, \dots, m$;*

3) *последовательность функций u_i сходится к функции u по мере;*

4) $\alpha_i \to \alpha$*;*

5) $\sup\limits_{t<a} |\varphi_i(t) - \varphi(t)| \to 0$*;*

6) *для любых $j = 1, 2, \dots, m$, $x_j \in R^n$, $\{x_{ji}\} \subset R^n$, если $x_{ji} \to x_j$, то последовательность функций $f_i(\cdot, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi})$ сходится к функции $f(\cdot, x_1, x_2, \dots, x_m)$ по мере.*

Тогда при каждом i задачи $(1), (1i)$ локально разрешимы, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Кроме того, существует такое $\theta > 0$, что

- для каждого предельно продолженного решения z_{β_i} уравнения (1), определенного на $[a, a + \beta)$, выполнено $\beta > \theta$;

- для любого i и для каждого предельно продолженного решения $z_{i\beta_i}$ уравнения $(1i)$, определенного на $[a, a + \beta)$, выполнено $\beta_i > \theta$;

- если для некоторого $\gamma < \beta$ при каждом i произвольно выбрать определенное на $[a, a + \gamma]$ локальное решение $z_{i\gamma}$ уравнения $(1i)$, то полученная последовательность будет компактна в пространстве $AC([a, a + \gamma], \mu, R^n)$, и все ее предельные точки будут локальными решениями уравнения (2);

- если определенное на $[a, a + \gamma]$ локальное решение z_γ уравнения (1) единственно, то для любой последовательности определенных на $[a, a + \gamma]$ локальных решений $z_{i\gamma}$ уравнений $(1i)$ имеет место $\int\limits_a^{a+\gamma} |z_\gamma(t) - z_{i\gamma}(t)|dt \to 0$.

Для произвольных $\Delta > 0$ и номера I обозначим $\mathcal{T}_j(\Delta, I) = \bigcup\limits_{i>I} \{t \in [a, b] | \tau_{ji}(t) < \Delta\}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия* 1) – 5) *теоремы 1 и пусть также*

6) *существуют такие* $\lambda \in R$, $\Delta > 0$, I, *что для любых* $x_1, x_2, \ldots, x_m \in R^n$, $u \in R^k$ *и* $\widehat{x}_j \in R^n$ *при каждом* $i > I$ *выполнено*

$$|f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_m, u) - f_i(t, x_1, x_2, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_m, u)| \leqslant \lambda |x_j - \widehat{x}_j|$$

при всех $t \in \mathcal{T}_j(\Delta, I)$.

Тогда при $\forall i > I$ *задача* (1i) *имеет единственное глобальное решение* $z_i \in AC([a, b], \mu, R^n)$, *являющееся продолжением всякого локального решения, задача* (1) *имеет единственное глобальное решение* $z \in AC([a, b], \mu, R^n)$, *являющееся продолжением всякого локального решения, причем* $\|z_i - z\|_{AC} \to 0$ *при* $i \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Матем. сб. М., 2006. Т. 197, №10. С. 33-56.

Поступила в редакцию 10 ноября 2008 г.

Statements about continuous dependence on parameters of solutions of functional-differential equations are offered. Obtained results permit investigate a correctness of models, which can be represented by differential equations with delay. All proofs are based on results of paper [1].

Keywords: Continuous dependence of solutions on parameters, controllable systems with delay, local solvability of Cauchi problem, solutions prolongation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhukovskiy E.S.* Continuous dependence on parameters of solutions of Volterra equations // Math. col. M. 2006. V. 197, № 10. P. 33-56.