ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. *Филиппов А.Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестник МГУ. Серия: Математика и механика. М., 1967. № 3. С. 16-26.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К.: Вища шк., 1987.
4. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 04-01-00324) и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования – NUFU (проект № PRO 06/02).

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

О НЕЛИНЕЙНОЙ W-ПОДСТАНОВКЕ И ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

© Т.В. Жуковская

Многие функционально-дифференциальные уравнения могут быть записаны в виде

$$Fx = f, \tag{1}$$

где оператор $F : D \to B$, $f \in B$ – известный, а $x \in D$ – искомый элементы, причем D и B являются банаховыми пространствами и D изоморфно декартовому произведению $B \times R^n$. При изучении таких функционально-дифференциальных уравнений можно использовать W-подстановку Н.В. Азбелева, с помощью которой краевая задача для уравнения (1) сводится к уравнеию в "пространстве решений" D или в "пространстве производных решений" B [1, с. 30]. W-подстановка осуществляет изоморфизм $B \times R^n \to D$.

При исследовании ряда теоретических и прикладных вопросов для нелинейных функционально-дифференциального уравнений требование линейности взаимно-однозначного соответствия между D и $B \times R^n$ оказывается ненужным. Кроме того, решение конкретных уравнений бывает целесообразно искать в множествах, не имеющих линейной структуры. Перечисленные соображения заставляют рассматривать уравнение (1) в предположении, что D и B – некоторые множества, для которых существует взаимно-однозначное соответствие между D и $B \times \Lambda$, $\Lambda \subset R^n$. Обозначим биективное отображение $B \times \Lambda \to D$ через W, а обратное отображение $D \to B \times \Lambda$ через (δ, r). Тогда краевая задача для уравнения (1) с условием $rx = \alpha$, $\alpha \in \Lambda$, равносильна уравнению $FW(y, \alpha) = 0$ относительно $y = \delta x$.

Применим эту идею к исследованию систем, в которых решение подвергается импульсному воздействию в фиксированый момент времени $t_0 \in [a, b]$, а величина этого воздействия зависит от состояния системы на промежутке времени $[a, t_0]$.

Пусть $C([a, t_0], R^n)$ – пространство непрерывных на $[a, t_0]$ функций $x : [a, t_0] \to R^n$ с нормой $\|x\|_C = \max_t |x(t)|$; $P : C([a, t_0], R^n) \to R^n$ – n-мерный непрерывный ограниченный вектор-функционал, $L([a, b], R^n)$ – пространство суммируемых функций $y : [a, b] \to R^n$, с нормой $\|y\|_L = \int_a^b |y(s)| ds$; $CS([a, b], R^n)$ – множество функций $x : [a, b] \to R^n$, непрерывных на $[a, t_0]$ и $(t_0, b]$, имеющих в точке t_0 скачок величины $x(t_0 + 0) - x(t_0) = Px^{t_0}$, где x^{t_0} является сужением x на $[a, t_0]$, с метрикой $\rho(x_1, x_2) = \max_t |x_1(t) - x_2(t)|$; $ACS([a, b], R^n)$ – множенство функций

$x : [a,b] \to R^n$, абсолютно непрерывных на $[a,t_0]$ и $(t_0,b]$, имеющих при почти всех t производную $x' \in L([a,b],R^n)$, терпящих в точке t_0 скачок величины $x(t_0+0) - x(t_0) = Px^{t_0}$, с метрикой $\rho(x_1,x_2) = |x_1(a) - x_2(a)| + \int\limits_a^b |x_1'(s) - x_2'(s)|\, ds$.

Рассмотрим уравнение

$$x' = Kx \tag{2}$$

с оператором $K : CS([a,b],R^n) \to L([a,b],R^n)$. Сведение задачи Коши для уравнения (2) к уравнению второго рода в пространстве $L([a,b],R^n)$ основывается на взаимно-однозначном соответствии между метрическим пространством $ACS([a,b],R^n)$ и декартовым произведением $L([a,b],R^n) \times R^n$, которое осуществляется отображениями $x \in ACS \mapsto \big(x',\, x(a)\big) \in L \times R^n$, $\big(y,\alpha\big) \in L \times R^n \mapsto x \in ACS$, $x(t) = x(a) + \int\limits_a^t y(s)\, ds + \chi(t-t_0)\, P \int\limits_a^{(\cdot)} y(s)\, ds$. Здесь $\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$

Т е о р е м а. *Если оператор* $K : CS([a,b],R^n) \to L([a,b],R^n)$ *является непрерывным, ограниченным и вольтерровым, то задача Коши для уравнениея (2) с начальным условием* $x(a) = \alpha$, *при любом* α, *в пространстве* $ACS([a,b],R^n)$ *локально разрешима, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

© Е.С. Жуковский, М.В. Борзова

Для интегрального оператора Volterra $(Ky)(t) = \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)\, y(s)\, ds$, действующего в пространстве $L([a,b],R)$ суммируемых функций, сопряженный оператор $K^* : L_\infty([a,b],R) \to L_\infty([a,b],R)$ имеет вид $(K^*g)(t) = \int\limits_t^b \mathcal{K}(s,t)\, g(s)\, ds$, то есть является опережающим. Ниже установлена связь между свойствами вольтерровости исходного и сопряженного линейных операторов, действующих в произвольных нормированных пространствах. Используется определение вольтерровости, предложенное в [1].

Пусть B – нормированное пространство, B^* – сопряженное пространство, и пусть каждому $\gamma \in [0,1]$ поставлено в соответствие отношение эквивалентности $\upsilon(\gamma)$ элементов пространства B. Назовем элементы $x, y \in B$, удовлетворяющие этому бинарному отношению, $\upsilon(\gamma)$-эквивалентными. Будем предполагать, что совокупность $\mathfrak{V} = \{\, \upsilon(\gamma) \mid \gamma \in [0,1]\,\}$ рассматриваемых отношений удовлетворяет условиям: $\upsilon(0) = B^2$; $\upsilon(1) = \{\,(x,x)\ x \in B\,\}$; $\gamma > \eta \Rightarrow \upsilon(\gamma) \subset \upsilon(\eta)$. Кроме того, будем считать, что отношения $\upsilon(\gamma) \in \mathfrak{V}$ сохраняются при сложении векторов и умножении их на числа, т. е. при каждом $\gamma \in (0,1)$, для любых элементов $x, \widehat{x}, y, \widehat{y} \in B$ и всякого числа λ

$$(x,\widehat{x}) \in \upsilon(\gamma), \quad (y,\widehat{y}) \in \upsilon(\gamma) \quad \Rightarrow \quad (x+y, \widehat{x}+\widehat{y}) \in \upsilon(\gamma), \quad (\lambda x, \lambda\widehat{x}) \in \upsilon(\gamma).$$

О п р е д е л е н и е. Оператор $F : B \to B$ будем называть *вольтерровым на системе* $\mathfrak{V}$, если для каждого $\gamma \in (0,1)$ и любых $x, y \in B$ из $(x,y) \in \upsilon(\gamma)$ следует $(Fx,\ Fy) \in \upsilon(\gamma)$.