ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С АЛГОРИТМАМИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ МАТРИЦ

© О.Н. Переславцева

Pereslavtseva O.N. Calculation experiments at calculation algorithms of characteristics of matrixes polynomials.

Работа посвящена вычислению характеристического полинома для матриц с рациональными коэффициентами.

Выбор алгоритмов определялся следующим. Теоретический анализ и сравнение алгоритмов были сделаны ранее в работах [2] и [3]. Там был рассмотрен алгоритм Т.Р.Сейфуллина [4], алгоритм Фаддеева-Леверье [5] и алгоритм Чистова [6, 7].

В предположении, что матрицы имеют порядок n, а их элементы являются k-битными числами, были получены следующие верхние оценки числа бит-операций умножения. Для алгоритма Сейфуллина оценка составляет $(k/10)(k + \varphi_n)n^5 + O(n^4)$ бит-операций, для алгоритма Фаддеева – $(k/2)(k + \varphi_n)n^5 + O(n^4)$, для метода Чистова – $(k/96)(19k + 3\varphi_n)n^5 + O(n^4)$, где $\varphi_n = \lceil \log_2 n \rceil$.

Сравнивая коэффициенты при k^2n^5, можно сделать предположение, что при вычислении характеристического полинома алгоритм Сейфуллина быстрее алгоритма Чистова в 2 раза и быстрее алгоритма Фаддеева-Леверье в 5 раз. Следовательно, среди указанных прямых методов вычисления характеристического полинома для матриц с рациональными коэффициентами лучшим является алгоритм Сейфулина.

Алгоритм Т.Р. Сейфуллина требует выполнения $n^4/4 - O(n^3)$ операций над элементами матрицы, однако известен алгоритм, предложенный Г.И. Малашонком в работе [1], требующий выполнения $O(n^3)$ операций над элементами матрицы. В основе его лежит идея построения матрицы, эквивалентной данной, но имеющей квазитреугольную матрицу коэффициентов. Будем называть его КТ-алгоритм. Хорошо известно, что применение модулярных методов, основанных на китайской теореме об остатках (КТО), позволяет получить более эффективные алгоритмы, чем прямые.

Поэтому были разработаны программы, реализующие алгоритм Т.Р. Сейфуллина и КТ-алгоритм, которые вычисляют характеристический полином прямым методом и модулярным методом с применением китайской теоремы об остатках (КТО). И проведен ряд экспериментов с этими алгоритмами.

Кроме этого интерес представляет сравнение реализаций указанных алгоритмов с алгоритмами, которые применяются сегодня в системах Mathematica и MAPLE.

В данной статье сравниваются следующие методы вычисления характеристического полинома:

1) прямой алгоритм Сейфуллина,
2) алгоритм Сейфуллина с применением КТО,
3) прямой КТ-алгоритм,
4) КТ-алгоритм с применением КТО,
5) алгоритм вычисления характеристического полинома в Mathematica 5.1,
6) алгоритм вычисления характеристического полинома в Maple 9.5.

Эксперименты проводились на процессоре AMD Athlon 64 × 3500+, оперативная память – 512 Mb. Программы написаны в среде Java (JDK 1.5). Для экспериментов брались матрицы над целыми числами, которые выбирались случайным образом из интервала {–99,99}. Размеры матриц менялись в пределах от 10 до 200. Приведем результаты этих экспериментов.

На рис. 1 сравнивается график зависимости времени вычисления характеристического полинома методом Сейфуллина с применением КТО от размеров матрицы и график функции $t = 27\cdot10^{-7}\, n^5$.

В статье [4] получена теоретическая оценка количества операций – $O(n^4)$, где n – размерность матрицы. Тогда для этого алгоритма с применением КТО оценка количества операций – $O(n^5)$. Эксперименты, приведённые на рис. 1, хорошо укладываются в эту теоретическую схему. Кривая, полученная экспериментально, обозначена сплошной линией, а теоретическая кривая (пунктиром) соответствует графику функции $t = 27\cdot10^{-7}n^5$ (с).

В статье [2] получена теоретическая оценка количества бит-операций — $O(n^5)$, где n — размерность матрицы. Эксперименты, приведённые на рис. 2, хорошо укладываются в эту теоретическую схему.

Теоретическая оценка числа операций КТ-алгоритма, данная в работе [1], равна $O(n^3)$. Следовательно, оценка числа операций КТ-алгоритма с применением КТО – $O(n^4)$. На рис. 3 изображены графики экспериментальной оценки КТ-алгоритма и функции $t = 31\cdot10^{-5}\, n^4$ (с) (пунктиром).

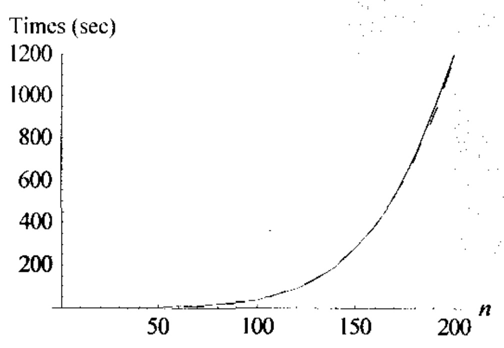

Рис. 1. График зависимости времени вычисления характеристического полинома методом Сейфуллина с применением КТО и график $27\cdot10^{-7}\, n^5$ (пунктиром)

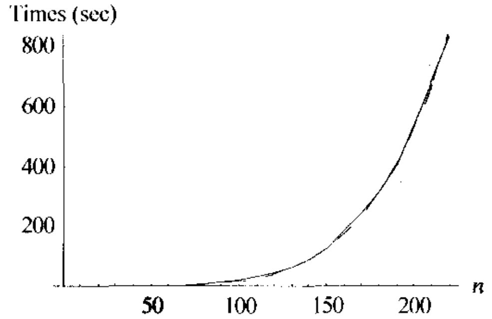

Рис. 2. График зависимости времени вычисления характеристического полинома прямым методом Сейфуллина и график $61 \cdot 10^{-7} n^5$ (пунктиром)

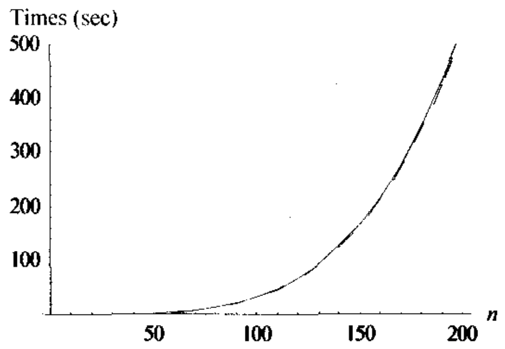

Рис. 3. График зависимости времени вычисления характеристического полинома методом КТ с применением КТО и график $31 \cdot 10^{-5} n^4$ (пунктиром)

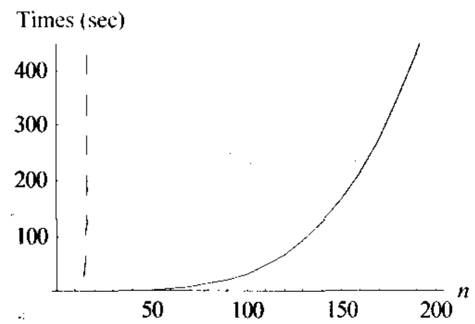

Рис. 4. Время вычисления характеристического полинома с использованием КТ-алгоритма прямым методом (пунктиром) и с применением КТО

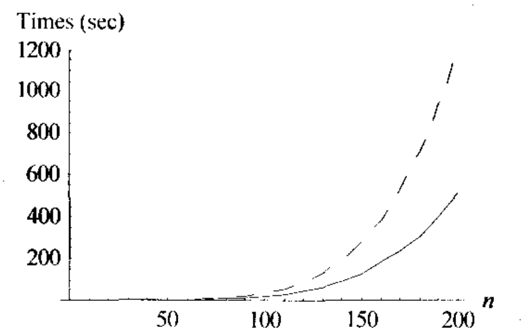

Рис. 5. Время вычисления характеристического полинома с использованием алгоритма Сейфуллина прямым методом и с применением КТО (пунктиром)

На рис. 4 показано время вычисления характеристического полинома с использованием КТ-алгоритма прямым методом (пунктиром) и с применением КТО, а на рис. 5 – время вычисления по алгоритму Сейфуллина прямым методом и с применением КТО (пунктиром).

Как видно по рис. 4, КТ алгоритм с применением КТО сильно выигрывает по сравнению с прямым КТ-алгоритмом. Так, при $n = 11$ он выигрывает в 9 раз, а при $n = 15$ – в 32 раза.

Применение КТО для алгоритма Сейфуллина ускорения не дает, наоборот, лучшим является прямой метод Сейфуллина, например, при $n = 40$ он выигрывает в 1.7 раза, при $n = 200$ – в 2.3 раза.

Сравним КТ-алгоритм с применением КТО и прямой алгоритм Сейфуллина (рис. 6). Как видно по графику, алгоритм Сейфуллина выигрывает у КТ-алгоритма, когда размерность матрицы $n < 200$. Наибольший выигрыш наблюдается при $n = 40$: алгоритм Сейфуллина здесь быстрее в 2.8 раза. Когда размер матрицы $n = 200$, алгоритмы показывают одинаковое время вычисления.

Отдельный интерес представляет вопрос сравнения новых алгоритмов с теми, которые реализованы в системах Mathematica 5.1 и Maple 9.5 (рис. 8 и 9). Так, например, для $n = 200$ Mathematica 5.1 проигрывает в 6 раз КТ-алгоритму с применением КТО, а Maple 9.5 – в 3.8 раза.

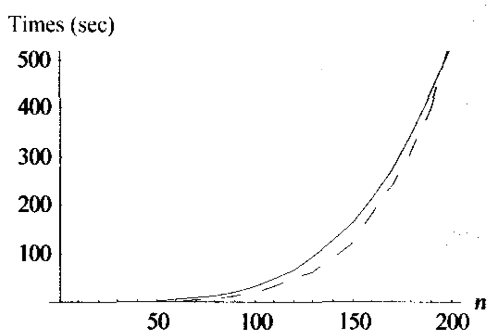

Рис. 6. Время вычисления характеристического полинома с использованием КТ-алгоритма с применением КТО и прямого алгоритма Сейфуллина (пунктиром), $80 < n < 200$

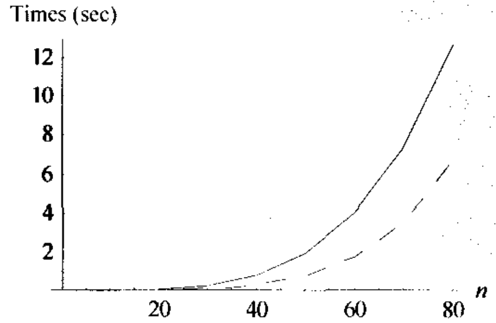

Рис. 7. Время вычисления характеристического полинома с использованием КТ-алгоритма с применением КТО и прямого алгоритма Сейфуллина (пунктиром) при $n < 80$

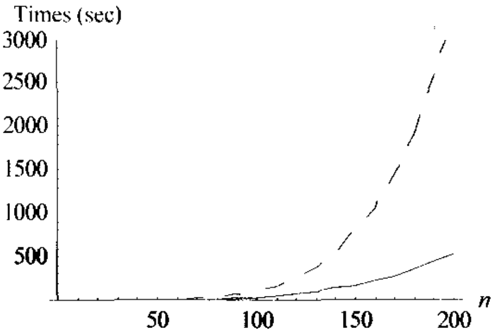

Рис. 8. Вычислительные эксперименты с использованием КТ-алгоритма с применением КТО и алгоритма вычисления характеристического полинома в Mathematica 5.1 (пунктиром)

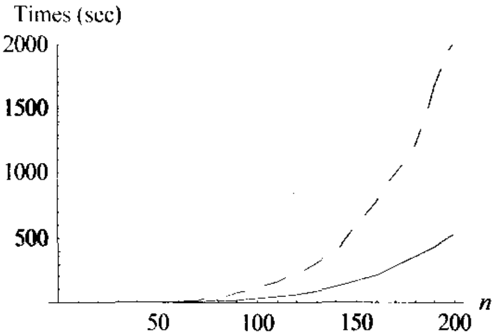

Рис. 9. Вычислительные эксперименты с использованием КТ-алгоритма с применением КТО и алгоритма вычисления характеристического полинома в Maple 9.5 (пунктиром)

Подведем итоги. Самым быстрым для малых порядков матриц теоретически и практически является прямой алгоритм Сейфулина. Для матриц, у которых порядки меньше 200, самым быстрым является прямой алгоритм Сейфуллина, а для матриц, порядок которых более 200, самым быстрым является КТ-алгоритм с применением КТО. При этом КТ-алгоритм показывает хорошее согласие с графиком функции $t = k_1 n^4$, а алгоритм Сейфуллина – с графиком функции $t = k_2 n^5$.

Сравнение с алгоритмами, реализованными в системах Mathematica и MAPLE, оказывается не в пользу этих систем. Так, для матриц 200 порядка, характеристический полином которых вычисляется с помощью КТ алгоритма с применением КТО и прямым алгоритмом Сейфуллина за одинаковое время, они выигрывают в 6 раз по сравнению с алгоритмом, реализованным в системе Mathematica, и 3.8 раза – по сравнению с алгоритмом, реализованным в системе MAPLE.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малашонок Г.И.* A computation of the characteristic polynomial of an endomorphism of a free module / Записки научных семинаров ПОМИ. 1999. Т. 258. С. 101-114.
2. *Переславцева О.Н.* Оценка числа бит-умножений в алгоритмах вычисления определителя, характеристического полинома и присоединённой матрицы // XI Державинские чтения. Тамбов, 2006. С. 79-83.
3. *Переславцева О.Н.* История и современное состояние теории алгоритмов вычисления характеристического полинома матрицы // Современное математическое образование и проблемы истории и методологии математики: междунар. науч. конф. Тамбов, 2006. С. 130-134.
4. *Сейфуллин Т.Р.* Вычисление определителя, присоединённой матрицы и характеристического полинома без деления // Кибернетика и системный анализ. 2002. №5. С.18-42.
5. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
6. Jounaïdi Abdeljaoued THÈSE «Algorithmes rapides pour le Calcul du Polynôme Caractéristique. Grade de docteur de l'Université de Franche-Comté, 22 mars 1997.
7. *Chistov A.L.* Fast parallel calculation of the rank of matrices over a field of arbitrary characteristic Proc. FCT '85. Springer Lecture Notes in Computer Science 199. 1985. PP. 147-150.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ, проект 04-07-90268.

Поступила в редакцию 19 октября 2006 г.

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

© **Г.И. Малашонок, А.А. Бетин**

Malashonok G.I., Betin A.A. On calculation of complex radicals of polynomials.

Приближенное вычисление корней полиномов является одной из важных задач вычислительной математики. Мы предлагаем алгоритм вычисления комплексных корней полиномов с любой требуемой точностью, при этом используются только рациональные вычисления и алгоритмы вычисления действительных корней полиномов с действительными коэффициентами с требуемой точностью.

Рассмотрим полином над полем комплексных чисел

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n z + a_{n+1} \quad (1)$$

Задача состоит в нахождении всех корней уравнения

$$f(z) = 0 \quad (2)$$

с заданной точностью E, где E – это максимальная по модулю ошибка вычисления действительной и мнимой части каждого корня.

Выделим у коэффициентов и неизвестного $z = x + iy$ действительную и мнимую части и представим функцию $f(x)$ как сумму ее действительной и мнимой части. Тогда задача сводится к решению системы уравнений,