

к трехмерной деформации стержня. Возможно произвольное количество дополнительных опор.

Использование символьных компьютерных вычислений над (кусочно-) многочленными функциями с рациональными коэффициентами позволяет вычислить критическую силу нагрузки, гарантируя, в принципе, любую наперед заданную точность результата.

Систематическое изложение теории метода и примеры его применения можно найти в книге [1].

В докладе приводятся новые примеры расчетов критической силы для трехмерного стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Култышев С. Ю., Цалюк В. З.* Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. 122 с. (<http://shop.rcd.ru>).

Цалюк Вадим Зиновьевич
Кубанский государственный ун-т
Россия, Краснодар
e-mail: vts@math.kubsu.ru

Поступила в редакцию 20 апреля 2007 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В ЦИЛИНДРЕ

© И. М. Цун

Интерес к решению задач типа Стефана — задач кристаллизации — связан с широким распространением производственных процессов, прежде всего, в металлургии. Рассмотрим задачу кристаллизации движущегося вдоль оси термически тонкого жидкостного цилиндра.

Наибольший интерес с точки зрения изучения особенностей рассматриваемого процесса представляет цикл исследований, проведенных Н.Р. Берманом и другими [1] в связи с разработкой и дальнейшим совершенствованием производственных процессов изготовления литого микропровода в стеклянной изоляции диаметром 5-30 мкм со скоростью до 8 м/с. Ими проанализирована задача кристаллизации не теплоизолированного от окружающей среды движущегося вдоль оси жидкостного цилиндра. Отличительной особенностью является то, что поверхность фронта кристаллизации этими исследователями была аксиоматизирована плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра. Следствием этого допущения ими были расчётным путём получены значительные переохлаждения жидких металлов ниже

температуры кристаллизации. Источники указывают [2] на крайнюю ограниченность этого допущения.

Если предположить, что диск толщиной Δl переместился совместно с цилиндром на величину $\Delta z = v\Delta\tau$ в направлении движения, то он потеряет в окружающую среду некоторое количество тепла за счет кристаллизации кольца толщиной Δr в диске

$$\Delta Q = -\Delta H_{\text{пл}} \cdot 2\pi r \cdot \Delta r \cdot \Delta l \cdot \rho_{\text{ж}} \quad (1)$$

Потери тепла составляют

$$\Delta Q = q \cdot 2\pi r_{\text{в}} \cdot \Delta l \cdot \Delta\tau, \quad (2)$$

где q — удельный тепловой поток с внешней поверхности, r — текущий радиус фронта кристаллизации, $r_{\text{в}}$ — текущий внешний радиус кристаллизующегося цилиндра,

$$r_{\text{в}} = r_1 \sqrt{(r/r_1)^2 + [1 - (r/r_1)^2](\rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{т}})},$$

r_1 — начальный радиус цилиндра, $\rho_{\text{ж}}$, $\rho_{\text{т}}$ — плотности металла в жидком и твердом состояниях, $\Delta H_{\text{пл}}$ — теплота плавления. Приравнявая выражения (1) и (2), переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$ и обозначив $r/r_1 = R$, $\rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{т}} = \Omega$, $r_1 = d_1/2$, получим уравнение, описывающее продвижение фронта кристаллизации по сечению цилиндра:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\frac{2q}{\rho_{\text{ж}}\Delta H_{\text{пл}}d_1} \sqrt{1 + \frac{1-R^2}{R^2}\Omega}.$$

В результате замены

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{dR}{dz} \cdot \frac{dz}{d\tau} = v \frac{dR}{dz}$$

получаем дифференциальное уравнение фронта кристаллизации

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{2q}{v\rho_{\text{ж}}\Delta H_{\text{пл}}d_1} \sqrt{1 + \frac{1-R^2}{R^2}\Omega},$$

решение которого с краевым условием $R|_{z=0} = 1$ задает вид поверхности, образующей фронт кристаллизации

$$Z_d = \frac{2}{N_q(1-\Omega)} [1 - \sqrt{R^2(1-\Omega) + \Omega}], \quad (3)$$

где $Z_d = z/d_1$, $N_q = 4q/(v\rho_{\text{ж}}\Delta H_{\text{пл}})$.

Комплекс N_q характеризует соотношение удельного теплового потока с внешней поверхности и теплового потока вдоль оси, создаваемого движущимся кристаллизующимся цилиндром.

Длина участка кристаллизации

$$L_{\text{к}} = \frac{l_{\text{к}}}{d_1} = Z_d|_{R=0} = \frac{2}{N_q(1+\Omega^{0,5})}.$$

Для случая $\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{т}}$ (то есть $\Omega = 1$) из (3) следует, что $Z_d = (1 - R^2)/N_q$.

Следовательно, фронт кристаллизации имеет форму, близкую к параболоиду вращения, и тем он ближе к указанной форме, чем меньше изменение плотности при кристаллизации.

В комплексе N_q единственной управляемой в широком диапазоне величиной является удельный тепловой поток q с внешней поверхности. Следовательно, единственным теплофизическим фактором сокращения участка кристаллизации до приемлемой длины является интенсификация внешнего теплообмена, что ставит задачу его математического моделирования в специфических условиях экструдирования расплавленного металла.

Таким образом, анализ влияния разных допущений о форме фронта кристаллизации в термически тонком цилиндре при математическом моделировании показал, что более общие результаты достигнуты при допущении о двумерном фронте кристаллизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бадинтер Е.Я., Берман Н.Р., Драбенко И.Ф. и др.* Литой микропровод и его свойства. Кишинев: Штиница, 1973. 318 с.
2. *Kavesh Sh.* Melt spinning of metal fibers // American Institute of Chemical Engineers. Symposium Series, 1978. V. 74, № 180. P. 1–15.
3. *Субботин Г.К., Цун И.М., Петышин В.П., Лукьянов В.И.* Некоторые особенности тепломассообмена при экструдировании расплавленных металлов для получения литой проволоки // Теплотехника процессов выплавки сталей и сплавов. Свердловск: Изд-во УПИ, 1977. Вып. 5. С. 31–37.
4. *Торопов Е.В., Субботин Г.К., Цун И.М.* Кипение жидкости на поверхности кристаллизующейся струи расплавленного металла // Кипение и конденсация. Рига: Рижск. политехн. ин-т, 1979. С. 35–39.
5. *Цун И.М.* Применимость допущений о форме фронта кристаллизации в термически тонком цилиндре при математическом моделировании // Вестник МаГУ: Периодический научный журнал. Магнитогорск: МаГУ, 2000. Вып. 1.
6. *Цун И.М.* Экспериментальные исследования устойчивости капиллярных струй // Вестник МаГУ: Периодический научный журнал. Магнитогорск: МаГУ, 2001-2002. Вып. 2-3.

Цун Иосиф Менделевич
Магнитогорский государственный ун-т
Россия, Магнитогорск
e-mail: tsoun@masu.ru

Поступила в редакцию 20 апреля 2007 г.

ФОРМИРОВАНИЕ КУЛЬТУРЫ МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ОБУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

© И. М. Цун

Культура мышления — это совокупность формально-логических, языковых, содержательно-методологических и этнических требований и норм, предъявляемых к интеллектуальной и творческой деятельности человека. Культурному, то есть ясному, четкому и последовательному мышлению противостоит мышление хаотичное, путаное, алогично-иррациональное. Иррационально-хаотичная манера мышления свидетельствует прежде всего о недостаточной развитости стиля мышления, либо просто об отсутствии эмоциональной культуры. В исключительном случае возможно говорить о психическом расстройстве личности.

Важной составной частью общей культуры человека является культура мышления.

Культура мышления как определенный уровень развития мыслительных способностей человека в значительной мере зависит от того, насколько мыслительная деятельность человека соответствует законам и требованиям логики.