Итак,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

что означает, что f – единичная матрица.

Литература

1. М. Холл. Комбинаторика. М.: Мир. 1970.

УДК 519.1

Фактор-матроиды простых графов [1]

© С. В. Кольцова

Ключевые слова: матроиды, графы, преобразование Радона

Описываются базы фактор-матроидов графов

A description of bases of graph factor-matroids is given

Матроид [3] M – это пара (E, I), где E – конечное множество, I – семейство его подмножеств, удовлетворяющее следующим условиям:

1) пустое множество входит в I;

2) если $A \subset B$ и B входит в I, то A входит в I;

3) если A и B содержатся в I и количество элементов в A на единицу больше количества элементов в B, то существует элемент $a \in A \backslash B$ такой, что $B \cup \{a\}$ содержится в I.

Подмножества из I называются независимыми. Максимальные (по включению) независимые подмножества называются базами матроида, а минимальные зависимые (не являющиеся независимыми) подмножества называются циклами. Все базы имеют одно и то же количество элементов. Это число называется рангом матроида.

Пример 1: матричный матроид. Пусть A – матрица размеров $n \times m$ над полем F. Определим матроид $M_F(A)$ следующим образом. Множество E состоит из строк матрицы A. Это – совокупность n векторов в F^m. Множество I состоит из линейно независимых совокупностей строк. Ранг матроида совпадает с рангом матрицы.

Рассматриваемые далее графы считаем конечными, неориентированными, без петель, кратных рёбер и изолированных вершин. Пусть граф G имеет n вершин.

[1] Работа поддержана грантами: РФФИ 06-06-96318 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

Пример 2: циклический матроид графа. Элементами матроида являются рёбра графа. Независимыми подмножествами – наборы рёбер лесов (подграфов, не содержащих циклов), базами – рёбра остовных лесов, циклами – рёбра простых циклов графа. Ранг матроида равен $n-k$, где k – число компонент связности графа.

Пусть A – матрица инцидентности графа G. Рассмотрим матричный матроид $M_F(A)$.

Если F – поле из двух элементов, то матроид $M_F(A)$ изоморфен циклическому матроиду графа G.

Если $F = \mathbb{R}$, то $M_F(A)$ называется фактор-матроидом графа G. Заметим, что для двудольного графа оба матроида совпадают.

Мы даём описание баз фактор-матроидов.

Разобьём графы на 3 класса: (1) не имеющие двудольных компонент связности; (2) имеющие только двудольные компоненты, т.е. двудольные графы; (3) имеющие двудольные и не двудольные компоненты.

Графы класса (3) можно представить как дизъюнктные объединения графов классов (1) и (2).

Теорема 1.1 *Базы фактор-матроидов графов класса (1) представляют собой набор рёбер остовных подграфов, являющихся дизъюнктными объединениями унициклических графов с нечётными циклами. Ранг таких фактор-матроидов равен n. Базы фактор-матроидов графов класса (2) совпадают с базами циклических матроидов графов, т.е. являются остовными лесами. Ранг таких фактор-матроидов равен $n-k$, где k– число компонент. Базы фактор-матроидов графов класса (3) представляют собой объединения баз компонент связности графа, указанных выше. Ранг таких фактор-матроидов равен $n-m$, где m – число двудольных компонент связности.*

Доказательство этой теоремы следует из [1] и [2].

В свою очередь из данной заметки следует, что один из результатов работы [2] можно сформулировать так.

Теорема 1.2 *Для того чтобы комбинаторное преобразование Радона [2] на графе было инъективным, необходимо и достаточно, чтобы у графа не было двудольных компонент.*

Литература

1. С. В. Кольцова, С. В. Поленкова. Матроид Радона графа. Вестник Тамбовского унив. Сер.: Естеств. и техн. науки, 2006, том 11, вып. 3, 257–261.

2. S. V. Koltsova, V. F. Molchanov. Radon transform of graphs and admissible complexes. Вестник Тамбовского ун-та. Сер.: Естеств. и техн. науки, 2006, том 11, вып.1, 41–48.