ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НА АБСОЛЮТЕ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩЕНИЙ [1]

Л. И. Грошева

Рассмотрим пространство Лобачевского $\mathcal{L} = G/K$, где $G = \mathrm{SO}_0(n-1,1)$, $K = \mathrm{SO}(n-1)$, в модели Клейна: $\mathcal{L}$ есть единичный шар B в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Граница этого шара (абсолют пространства Лобачевского) есть единичная сфера S в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть $\overline{B} = B \cup S$. В работе [2] мы изучали канонические представления R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, группы G на пространстве $\mathcal{L}$. Каноническое представление R_λ порождает граничное представление L_λ группы G, действующее в пространстве $\Sigma(\overline{B})$, обобщенных функций, сосредоточенных на S. В настоящей статье мы рассматриваем пространство $\Sigma(\overline{B})^K$ обобщенных функций из $\Sigma(\overline{B})$, инвариантных относительно K. Это пространство $\Sigma(\overline{B})^K$ имеет два естественных базиса: первый базис состоит из производных дельта-функции, сосредоточенной на S, по радиальному направлению, второй базис получается ортогонализацией первого базиса относительно некоторой билинейной формы (формы Березина). Второй базис является также собственным для некоторого дифференциального оператора – образа элемента Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в представлении R_λ.

Эти два базиса выражаются друг через друга посредством верхних треугольных матриц с единичной диагональю. Мы находим явно эти матрицы, а также матрицы попарных скалярных произведений элементов этих базисов. Кроме того, мы пишем некоторые производящие функции.

Для плоскости Лобачевского аналогичные результаты были получены в [3].

Введем некоторые обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0,1,2,\ldots\}, \\ a^{[m]} &= a(a+1)\ldots(a+m-1) = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}, \end{aligned}$$

для многообразия M через $\mathcal{D}(M)$ обозначается пространство Шварца комплексных бесконечно дифференцируемых функций с обычной топологией и через $\mathcal{D}'(M)$ обозначается пространство обобщенных функций на M – линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 05-01-00074а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом № 1.2.02.

§ 1. Канонические представления на пространстве Лобачевского

Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, билинейную форму

$$[x, y] = -x_1 y_1 - \ldots - x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n.$$

Группа $G = \mathrm{SO}_0(n-1, 1)$ есть связная подгруппа в группе всех линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих эту форму. Мы будем считать, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, в соответствии с этим мы записываем векторы в виде строки.

Разобъем матрицы $g \in G$ на блоки соответственно разбиению $n = (n-1) + 1$:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\langle u, v \rangle$ стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_{n-1} v_{n-1}.$$

Пространство Лобачевского размерности $n-1$ в модели Клейна есть единичный шар B: $\langle u, u \rangle < 1$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Группа G действует на B дробно-линейно:

$$u \mapsto u \cdot g = \frac{u\alpha + \gamma}{u\beta + \delta}.$$

Стационарная подгруппа K точки $u = 0$ изоморфна $\mathrm{SO}(n-1)$. Указанное действие определено также на границе шара B – единичной сфере $S : \langle u, u \rangle = 1$.

Обозначим

$$p = 1 - \langle u, u \rangle.$$

Возьмем на B полярные координаты $p, s : u = \sqrt{1-p} \cdot s, s \in S$. В этих координатах оператор Лапласа-Бельтрами Δ на B имеет вид

$$\Delta = 4(1-p)p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} + 2p(4 - n - 3p)\frac{\partial}{\partial p} + \frac{p}{1-p}\Delta_S, \tag{1.1}$$

где Δ_S – оператор Лапласа-Бельтрами на S.

Определим билинейную форму для функций на B:

$$\langle F, f \rangle_B = \int_B F(u) f(u) du, \tag{1.2}$$

где du - евклидова мера на B: $du = du_1 \ldots du_{n-1}$.

Обозначим через $\mathcal{D}(\overline{B})$ пространство ограничений на $\overline{B}$ функций из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ и через $\mathcal{D}'(\overline{B})$ пространство обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ с носителем из $\overline{B}$.

Канонические представления $R_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$, группы G действуют в пространстве $\mathcal{D}(\overline{B})$ по формуле

$$\big(R_\lambda(g) f\big)(u) = f(u \cdot g)(u\beta + \delta)^{-\lambda - n}.$$

Скалярное произведение (1.2) инвариантно относительно пары $\big(R_\lambda, R_{-\lambda-n}\big)$, т.е.

$$\langle R_\lambda(g)F, f\rangle_B = \langle F, R_{-\lambda-n}(g^{-1})f\rangle_B.$$

Это позволяет распространить R_λ на $\mathcal{D}'(\overline{B})$.

Определим на $\mathcal{D}(\overline{B})$ оператор Q_λ:

$$\big(Q_\lambda f\big)(u) = \int_B \Big\{1 - \langle u, v\rangle\Big\}^\lambda f(v)dv,$$

интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ и распространяется по аналитичности на всю комплексную плоскость λ до мероморфной функции. Он сплетает R_λ и $R_{-\lambda-n}$:

$$R_{-\lambda-n}(g)Q_\lambda = Q_\lambda R_\lambda(g).$$

Следовательно, билинейная форма

$$(f, h)_\lambda = c(\lambda)\langle Q_\lambda f, h\rangle_B \tag{1.3}$$

инвариантна относительно R_λ. Здесь множитель $c(\lambda)$ дается формулой

$$c(\lambda) = \pi^{-(n-1)/2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{-\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-n-\lambda}{2}\right)},$$

он выбирается из некоторых соображений, см. [2].

Пусть $\Delta_{\mathfrak{g}}$ - элемент Казимира в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Представление R_λ сопоставляет ему дифференциальный оператор

$$\Delta_\lambda = \Delta + 4(\lambda+n)p(1-p)\frac{\partial}{\partial p} + (\lambda+n)\big[\lambda + 2 - (\lambda+n+1)p\big],$$

так что его радиальная часть (действующая на K-инвариантных функциях, т.е. на функциях, зависящих только от p) в силу (1.1) есть оператор

$$4(1-p)p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2} + 2p\big[2\lambda + n + 4 - (2\lambda+2n+3)p\big]\frac{\partial}{\partial p} + (\lambda+n)\big[\lambda+2-(\lambda+n+1)p\big].$$

§ 2. Представления группы G, связанные с конусом

Мы используем компактную картину для представлений, связанных с конусом (представлений класса 1), см. [1]. Такое представление $T_\sigma, \sigma \in \mathbb{C}$, группы G действует в пространстве $\mathcal{D}(S)$ по формуле

$$\big(T_\sigma(g)\varphi\big)(s) = \varphi(s\cdot g)(s\beta+\delta)^\sigma.$$

Элемент Казимира $\Delta_{\mathfrak{g}}$ переходит в скалярный оператор:

$$T_\sigma\big(\Delta_{\mathfrak{g}}\big) = \sigma(\sigma+n-2)\cdot E.$$

Билинейная форма

$$\langle\psi,\varphi\rangle_S = \int_S \psi(s)\varphi(s)ds,$$

где ds - евклидова мера на S, инвариантна относительно пары $\big(T_\sigma, T_{2-n-\sigma}\big)$, т.е.

$$\langle T_\sigma(g)\psi,\varphi\rangle_S = \langle\psi, T_{2-n-\sigma}(g^{-1})\varphi\rangle_S.$$

Определим оператор A_σ в $\mathcal{D}(S)$:

$$\left(A_\sigma\varphi\right)(s) = \int\limits_S \left(1-\langle s,t\rangle\right)^{2-n-\sigma}\varphi(t)\,dt.$$

Он сплетает T_σ и $T_{2-n-\sigma}$.

Функция ψ_0 на S, равная тождественно единице, является собственной для оператора A_σ:

$$A_\sigma\psi_0 = j(\sigma)\psi_0, \tag{2.1}$$

где

$$j(\sigma) = 2^{-\sigma}\pi^{(n-2)/2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2-n}{2}-\sigma\right)}{\Gamma(-\sigma)}. \tag{2.2}$$

Представления T_σ неприводимы для всех σ, за исключением $\sigma\in\mathbb{N}$ и $\sigma\in 2-n-\mathbb{N}$.

§ 3. Граничные представления

Каноническое представление R_λ порождает граничное представление L_λ, действующее на обобщенных функциях, сосредоточенных на S. Это делается следующим образом.

Обозначим через $\Sigma_m(\overline{B}), m\in\mathbb{N}$, пространство обобщенных функций ζ из $\mathcal{D}'(\overline{B})$, имеющих вид

$$\zeta = \varphi_0(s)\delta(p) + \varphi_1(s)\delta'(p) + \ldots + \varphi_m(s)\delta^{(m)}(p), \tag{3.1}$$

где $\delta(p)$ – дельта-функция Дирака на прямой, $\delta^{(k)}(p)$ – ее производные, $\varphi_k\in\mathcal{D}(S)$. Положим $\Sigma(\overline{B}) = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\Sigma_m(\overline{B})$. Представление R_λ сохраняет пространство $\Sigma(\overline{B})$ и фильтрацию $\Sigma_0(\overline{B})\subset\Sigma_1(\overline{B})\subset\ldots$. Ограничение представления R_λ на пространство $\Sigma(\overline{B})$ и есть представление L_λ.

Сопоставим обобщенной функции (3.1) столбец

$$(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_m,0,0,\ldots).$$

Тогда L_λ записывается верхней треугольной матрицей с диагональю $T_{2-n-\lambda}, T_{4-n-\lambda}, T_{6-n-\lambda},\ldots$.

Форму $(f,h)_\lambda$ можно распространить на $\Sigma(\overline{B})$: она определяется естественным образом на $\Sigma_k(\overline{B})$ для $\operatorname{Re}\lambda > 2k-1$ и затем продолжается на всю плоскость λ по аналитичности до мероморфной функции. В частности,

$$\big(\psi\delta(p),\varphi\delta(p)\big)_\lambda = \alpha(\lambda,0)\langle A_{2-n-\lambda}\psi,\varphi\rangle_S,$$

где α дается формулой (3.8) ниже.

Обозначим через $b(\lambda)$ последнее скалярное произведение для $\psi = \varphi = \psi_0$. Мы имеем

$$b(\lambda) = (\delta(p), \delta(p))_\lambda = 2^{\lambda+n-4}\,\pi^{-1/2}\,\Omega_{n-1}\,\frac{\Gamma(\lambda+\frac{n-2}{2})\Gamma(\frac{1-\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{2-n-\lambda}{2})\Gamma(\lambda+n-2)},$$

где Ω_k обозначает объем единичной сферы в $\mathbb{R}^k$.

Разложим представление L_λ для общего случая: $\lambda \notin -(n-4)/2 + \mathbb{N}$.

Сначала определим дифференциальные операторы $W_{\sigma,k}$ и $W^*_{\sigma,k}$ на $\mathcal{D}(S)$. Рассмотрим следующие степенные ряды по p:

$$(1-p)^{l/2} F\left(\frac{\sigma+n-2+l}{2}, \frac{\sigma+n-1+l}{2}; \sigma+\frac{n}{2}; p\right) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\sigma,\mu_l)p^k, \quad (3.2)$$

$$(1-p)^{-l/2} F\left(\frac{\sigma+2-l}{2}, \frac{\sigma+1-l}{2}; \sigma+\frac{n}{2}; p\right) = \sum_{k=0}^{\infty} w^*_k(\sigma,\mu_l)p^k, \quad (3.3)$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса, $\mu_l = l(3-n-l)$, $l \in \mathbb{N}$. Положим

$$W_{\sigma,k} = w_k(\sigma, \Delta_S), \quad W^*_{\sigma,k} = w^*_k(\sigma, \Delta_S). \quad (3.4)$$

Заметим, что $W_{\sigma,0} = W^*_{\sigma,0} = 1$.

Определим следующие операторы $\xi_{\lambda,k} : \mathcal{D}(S) \to \Sigma_k(\overline{B})$:

$$\xi_{\lambda,k}(\varphi) = \sum_{b=0}^{k} (-1)^b\,\frac{k!}{(k-b)!}\,W_{\lambda-2k,b}(\varphi)\cdot\delta^{(k-b)}(p). \quad (3.5)$$

Оператор $\xi_{\lambda,k}$ сплетает $T_{2-n-\lambda+2k}$ с L_λ.

Имеют место следующие "соотношения ортогональности":

$$(\xi_{\lambda,k}(\psi), \xi_{\lambda,k}(\varphi))_\lambda = \alpha(\lambda,k)\langle A_{2-n-\lambda+k}\psi, \varphi\rangle_S, \quad (3.6)$$

$$(\xi_{\lambda,k}(\psi), \xi_{\lambda,r}(\varphi))_\lambda = 0, \ k \neq r, \quad (3.7)$$

где

$$\alpha(\lambda,k) = 2^{\lambda-2k-1}\,(-1)^k\,k!\,\pi^{(n-2)/2}\,\frac{\Gamma(-\lambda+2k)\Gamma(\frac{2-n}{2}-\lambda+k)}{\Gamma(-\lambda/2)\Gamma(\frac{2-n-\lambda}{2})\Gamma(\frac{2-n}{2}-\lambda+2k)}. \quad (3.8)$$

"Старый базис" $\varphi\delta^{(k)}(p)$ выражается через "новый базис" $\xi_{\lambda,m}(\varphi)$ следующим образом:

$$\varphi(s)\delta^{(k)}(p) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r}\,\frac{k!}{r!}\,\xi_{\lambda,r}\left(W^*_{2-n-\lambda+2r,k-r}(\varphi)\right). \quad (3.9)$$

Пусть $V_{\lambda,k}$ обозначает образ оператора $\xi_{\lambda,k}$. Это пространство содержится в $\Sigma_k(\overline{B})$, оно есть собственное пространство для оператора Δ_λ с собственными значением $(\lambda-2k)(\lambda+n-2-2k)$.

Для рассматриваемого общего случая граничное представление L_λ диагонализуемо, а именно, $\Sigma(\overline{B})$ распадается в прямую сумму подпространств $V_{\lambda,k}$, $k \in \mathbb{N}$, ограничение представления L_λ на $V_{\lambda,k}$ эквивалентно $T_{2-n-\lambda+2k}$.

§ 4. Пространство K-инвариантных обобщенных функций

Обозначим через $\Sigma_m(\overline{B})^K$ и $\Sigma(\overline{B})^K$ подпространства в $\Sigma_m(\overline{B})$ и $\Sigma(\overline{B})$, соответственно, состоящие из K-инвариантных обобщенных функций. Тогда коэффициенты φ_i в (3.1) – постоянные функции.

В пространстве $\Sigma(\overline{B})^K$ мы имеем два базиса: первый состоит из обобщенных функций

$$\delta(p), \delta'(p), \ldots, \delta^{(k)}(p), \ldots, \tag{4.1}$$

второй состоит из обобщенных функций

$$\zeta_{\lambda,0}, \zeta_{\lambda,1}, \ldots, \zeta_{\lambda,k}, \ldots, \tag{4.2}$$

где

$$\zeta_{\lambda,k} = \xi_{\lambda,k}(\psi_0).$$

Элементы второго базиса являются собственными функциями оператора Δ_λ:

$$\Delta_\lambda \zeta_{\lambda,k} = (\lambda - 2k)(\lambda + n - 2 - 2k)\zeta_{\lambda,k}.$$

Пересечение $V_{\lambda,k} \cap \Sigma(\overline{B})^K$ одномерно, базисом в нем служит как раз $\zeta_{\lambda,k}$.

Теорема 4.1 *Базис* (4.2) *ортогонален относительно формы* (1.3)*:*

$$\begin{aligned} (\zeta_{\lambda,k}, \zeta_{\lambda,k})_\lambda &= \beta(\lambda, k), \\ (\zeta_{\lambda,k}, \zeta_{\lambda,r})_\lambda &= 0, \ k \neq r, \end{aligned}$$

где

$$\beta(\lambda, k) = b(\lambda) \cdot 2^{-4k}\, k!\, (-1)^k \, \frac{(-\lambda)^{[2k]}(3 - n - \lambda)^{[2k]}}{\left(\frac{4-n}{2} - \lambda\right)^{[2k]}\left(\frac{2-n}{2} - \lambda + k\right)^{[k]}}.$$

Теорема получается из (3.6), (3.7), (3.8), (2.1), (2.2).

Теорема 4.2 *Элементы базисов* (4.1) *и* (4.2) *выражаются друг через друга следующим образом:*

$$\zeta_{\lambda,k} = \sum_{b=0}^{k} (-1)^b \binom{k}{b} 2^{-2b} \frac{(\lambda + n - 2 - 2k)^{[2b]}}{(\lambda + n/2 - 2k)^{[b]}} \delta^{(k-b)}(p), \tag{4.3}$$

$$\delta^{(k)}(p) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} \binom{k}{s} 2^{2s-2k} \frac{(3 - n - \lambda + 2s)^{[2k-2s]}}{((4-n)/2 - \lambda + 2s)^{[k-s]}} \zeta_{\lambda,s}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Нам нужно вычислить $W_{\sigma,k}(\psi_0)$ и $W^*_{\sigma,k}(\psi_0)$. По (3.4), (3.2), (3.3) мы имеем

$$W_{\sigma,k}(\psi_0) = w_k(\sigma,0)\psi_0 = \frac{\left(\frac{\sigma+n-2}{2}\right)^{[k]}\left(\frac{\sigma+n-1}{2}\right)^{[k]}}{\left(\sigma+\frac{n}{2}\right)^{[k]}k!}\,\psi_0 = 2^{-2k}\,\frac{(\sigma+n-2)^{[2k]}}{(\sigma+\frac{n}{2})^{[k]}\,k!}\,\psi_0,$$

$$W^*_{\sigma,k}(\psi_0) = w^*_k(\sigma,0)\psi_0 = \frac{\left(\frac{\sigma+2}{2}\right)^{[k]}\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^{[k]}}{\left(\sigma+\frac{n}{2}\right)^{[k]}k!}\,\psi_0 = 2^{-2k}\,\frac{(\sigma+1)^{[2k]}}{(\sigma+\frac{n}{2})^{[k]}\,k!}\,\psi_0, \qquad (4.5)$$

Подставляя в формулы (3.5) и (3.9) значения $\sigma = \lambda - 2k$ и $\sigma = 2 - n - \lambda + 2r$, соответственно, и полагая $\varphi = \psi_0$, мы получаем (4.3) и (4.4). □

Заметим, что формулу (4.3) можно записать следующим образом

$$\zeta_{\lambda,k} = F\Big(\frac{\lambda+n-2}{2} - k, \frac{\lambda+n-1}{2} - k; \lambda + \frac{n}{2} - 2k; p\Big)\,\delta^{(k)}(p).$$

Теорема 4.3 *Имеет место следующее разложение:*

$$\exp\Big(u\frac{d}{dp}\Big)\delta(p) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\,F\Big(\frac{4-n-\lambda}{2} + k, \frac{3-n-\lambda}{2} + k; \frac{4-n}{2} - \lambda + 2k; -u\Big)\cdot\zeta_{\lambda,k}.$$

Теорема вытекает из (4.5) с $\sigma = 2 - n - \lambda + 2k$.

Теорема 4.4 *Попарные скалярные произведения элементов базиса* (4.1) *даются следующей формулой:*

$$\big(\delta^{(m)}(p), \delta^{(r)}(p)\big)_\lambda = b(\lambda)\cdot(-1)^{m+r}\,2^{-2r-2m}\,\frac{(3-n-\lambda)^{[2m]}(3-n-\lambda)^{[2r]}}{(\frac{4-n}{2}-\lambda)^{[m+r]}}. \qquad (4.6)$$

Доказательство аналогично доказательству подобной формулы из [3].

Оператор Δ_λ действует на обобщенные функции $\delta^{(m)}(p)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda\delta^{(m)}(p) &= (\lambda-2m)(\lambda+n-2-2m)\delta^{(m)}(p)\\ &+ m(\lambda+n-2-2m)(\lambda+n-1-2m)\delta^{(m-1)}(p).\end{aligned}$$

Поскольку оператор Δ_λ симметричен относительно формы (1.3), мы получаем для скалярных произведений $\big(\delta^{(m)}(p), \delta^{(r)}(p)\big)_\lambda$ соотношение:

$$\begin{aligned}&-(m-r)(4\lambda-4m-4r-4+2n)\big(\delta^{(m)}(p),\delta^{(r)}(p)\big)_\lambda =\\ &= r(\lambda+n-2-2r)(\lambda+n-1-2r)\big(\delta^{(m)}(p),\delta^{(r-1)}(p)\big)_\lambda\\ &-m(\lambda+n-2-2m)(\lambda+n-1-2m)\big(\delta^{(m-1)}(p),\delta^{(r)}(p)\big)_\lambda.\end{aligned}$$

Формула (4.6) есть решение этого конечно-разностного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.

2. *Л. И. Грошева.* Канонические и граничные представления на пространстве Лобачевского. Вестник Тамбовского унив. Сер. Ест. техн. науки, 2004, том 9, вып. 3, 306–311.

3. *L. I. Grosheva.* Boundary representations on the Lobachevsky plane. Вестник Тамбовского унив. Сер. Ест. техн. науки, 2005, том 10, вып. 4, 357–365.