УДК 517.98

Новый подход к полиномиальному квантованию [6]

© В. Ф. Молчанов

Ключевые слова: симплектические многообразия, исчисление символов, квантование, преобразование Березина

Предлагается новый подход к полиномиальному квантованию на пара-эрмитовых симметрических пространствах, использующий понятие "надгруппы". При таком подходе появление ковариантных и контравариантных символов Березина и преобразования Березина становится совершенно естественным и прозрачным.

We present a new approach to polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces using the notion of an "overgroup". This approach gives the Berezin covariant and contravariant symbols and the Berezin transform in a highly natural and transparent way.

Квантование в духе Березина на пара-эрмитовых симметрических пространствах G/H было построено в [2]. Один из вариантов квантования – это так называемое *полиномиальное квантование*, здесь в качестве исходной алгебры операторов берется алгебра операторов из представления универсальной обертывающей алгебры. Концепция полиномиального квантования на пара-эрмитовых симметрических пространствах G/H была предложена в [4]. Для ранга один явные формулы были даны в [3]. Сейчас мы предлагаем новый подход к полиномиальному квантованию, использующий понятие "надгруппы". При таком подходе появление ковариантных и контравариантных символов Березина и преобразования Березина становится совершенно естественным и прозрачным. Кроме того, такая точка зрения может привести к различным обобщениям теории.

В первых трех параграфах мы напоминаем основные конструкции полиномиального квантования с необходимыми дополнениями и улучшениями. Сам новый подход излагается в § 4. В последнем параграфе подробно разбирается ключевой пример.

[6]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, 06-06-96318 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

§ 1. Параэрмитовы симметрические пространства

Напомним основные понятия полиномиального квантования на пара-эрмитовых симметрических пространствах. Это – вариант квантования (исчисления символов) в духе Березина на пара-эрмитовых симметрических пространствах.

Пусть G – связная полупростая группа Ли. Пусть σ – некоторый нетривиальный инволютивный автоморфизм (инволюция) группы G. Пусть H – подгруппа в G, лежащая между $(G^\sigma)_e$ и G^σ:

$$(G^\sigma)_e \subset H \subset G^\sigma$$

(т.е. H – открытая подгруппа в G^σ). Однородное пространство G/H называется *полупростым симметрическим пространством.*

Как правило, мы будем считать, что группы действуют на своих однородных пространствах *справа*, так что G/H – это пространство правых классов смежности Hg.

Существует инволюция Картана τ группы G, коммутирующая с σ. Обозначим $\theta = \sigma\tau = \tau\sigma$. Положим $K = G^\tau$. Автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g}$, индуцированные инволюциями σ и τ, будем обозначать теми же самыми буквами σ и τ.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ собственных для σ подпространств с собственными значениями $+1$ и -1, соответственно. Аналогичное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ имеет место для инволюции τ. Поскольку σ и τ коммутируют, имеет место совместное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}.$$

Подпространство $\mathfrak{q}$ можно отождествить с касательным пространством к G/H в точке $x^0 = He$ (e – единица группы G). Оно инвариантно относительно группы H и ее алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в присоединенном представлении в $\mathfrak{g}$.

Картановским подпространством в $\mathfrak{q}$ называется максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{q}$, состоящая из полупростых элементов. Все такие подпространства имеют одинаковую размерность. Она называется *рангом* симметрического пространства G/H. Предположим, что пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ – эффективная, т.е. $\mathfrak{h}$ не содержит нетривиального идеала алгебры $\mathfrak{g}$.

Теперь предположим дополнительно, что G/H – *симплектическое* многообразие. Тогда $\mathfrak{h}$ имеет ненулевой центр $Z(\mathfrak{h})$. Для простоты мы будем считать, что G/H есть G-орбита элемента $Z_0 \in \mathfrak{g}$ в присоединенном представлении группы G, т.е. $G/H = \mathrm{Ad}\, G \cdot Z_0$. В частности, мы видим, что $Z_0 \in Z(\mathfrak{h})$.

Мы можем считать, что G – простая группа Ли. Симплектические полупростые симметрические пространства G/H с *простой* группой G делятся на 4 класса:

a) эрмитовы симметрические пространства;

b) полукэлеровы симметрические пространства;

c) параэрмитовы симметрические пространства;

d) комплексификации эрмитовых симметрических пространств.

Пространства из класса a) римановы, из остальных трех классов псевдоримановы (не римановы). Римановой формой для пространства из классов b), c), d) служит эрмитово симметрическое пространство. Для пространств класса a) алгебра Ли $\mathfrak{h}$ совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Для пространств классов a), b), c) центр $Z(\mathfrak{h})$ одномерен (напомним, что G проста), так что $Z(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}Z_0$.

Березин построил квантование для пространств класса a). Мы рассматриваем пространства класса c). В этом случае элемент Z_0 лежит в $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ и может быть нормирован так, что оператор $I = (\mathrm{ad}\, Z_0)_{\mathfrak{q}}$ в $\mathfrak{q}$ является инволюцией. Пусть $\mathfrak{q}^{\pm}$ – собственные для I подпространства в $\mathfrak{q}$ с собственными значениями ± 1, соответственно. Оба эти подпространства являются абелевыми подалгебрами в $\mathfrak{g}$, они инвариантны относительно H и неприводимы. Кроме того, оба эти подпространства лагранжевы. Для $h \in H$ обозначим

$$b(h) = \det(\mathrm{Ad}h)|_{\mathfrak{q}^+}.$$

Пара $(\mathfrak{q}^+, \mathfrak{q}^-)$ является йордановой парой с умножением

$$\{X, Y, Z\} = \frac{1}{2}\,[[X, Y],\, Z].$$

Пусть r и $\varkappa$ – ранг и род этой йордановой пары. Ранги йордановой пары $(\mathfrak{q}^+, \mathfrak{q}^-)$, пространства G/H и пространства $K/K \cap H$ совпадают (так что, в частности, G/H имеет дискретную серию).

Положим $Q^{\pm} = \exp \mathfrak{q}^{\pm}$. Группа H нормализует обе подгруппы Q^- и Q^+, т.е. $HQ^{\pm} = Q^{\pm}H$. Подгруппы $P^{\pm} = HQ^{\pm} = Q^{\pm}H$ являются максимальными параболическими подгруппами в G. Мы имеем следующие разложения:

$$G = \overline{Q^+HQ^-}, \quad G = \overline{Q^-HQ^+},$$

где черта означает замыкание, а множества под чертой открыты и плотны в G. Назовем эти разложения соответственнно разложениями Гаусса и "анти–Гаусса". Эти разложения означают, что почти всякий элемент $g \in G$ можно записать соответственно в одном из следующих видов:

$$g = \exp Y \cdot h \cdot \exp X, \quad g = \exp X \cdot h \cdot \exp Y,$$

где $X \in \mathfrak{q}^-$, $Y \in \mathfrak{q}^+$, в каждом разложении все три множителя определены однозначно.

Для всякого элемента $g \in G$ определим преобразование $\xi \mapsto \widetilde{\xi} = \xi \bullet g$ пространства $\mathfrak{q}^-$ и преобразование $\eta \mapsto \widehat{\eta} = \eta \circ g$ пространства $\mathfrak{q}^+$ помощью разложений Гаусса и "анти-Гаусса" соответственно:

$$\exp \xi \cdot g = \exp Y \cdot \widetilde{h} \cdot \exp \widetilde{\xi}, \tag{1.1}$$

$$\exp \eta \cdot g = \exp X \cdot \widehat{h} \cdot \exp \widehat{\eta}, \tag{1.2}$$

где $X \in \mathfrak{q}^-$, $Y \in \mathfrak{q}^+$. Эти действия определены на открытых и плотных множествах, зависящих от g.

Следовательно, G действует на $\mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+ : (\xi, \eta) \mapsto (\widetilde{\xi}, \widehat{\eta})$. Стационарная подгруппа точки $(0,0) \in \mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+$ есть $P^+ \cap P^- = H$, так что мы получаем вложение

$$\mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+ \hookrightarrow G/H,$$

образ которого – открытое и плотное множество. Следовательно, мы можем рассматривать ξ, η как координаты на G/H, назовем их *орисферическими координатами.*

Укажем явные формулы для указанного вложения. Разложим произведение "анти-Гаусса" $\exp \xi \cdot \exp(-\eta)$ по Гауссу:

$$\exp \xi \cdot \exp(-\eta) = \exp(-Y) \cdot h \cdot \exp X, \tag{1.3}$$

где $X \in \mathfrak{q}^-$, $Y \in \mathfrak{q}^+$. Обозначим полученный элемент $h \in H$ через $h(\xi, \eta)$. Сейчас разложение (1.3) удобно переписать несколько в другом виде:

$$\exp \xi \cdot \exp(-\eta) = \exp(-Y) \cdot \exp X \cdot h, \tag{1.4}$$

где Y и h – те же, что и в (1.3), так что $h = h(\xi, \eta)$, а X получается из X в (1.3) преобразованием $\mathrm{Ad}\, h$. С помощью (1.4) образуем следующий элемент $g \in G$:

$$g = \exp Y \exp \xi = \exp X \cdot h \cdot \exp \eta. \tag{1.5}$$

Тогда паре ξ, η отвечает точка $x = x^0 g$, где g определен как раз равенствами (1.5).

При действии группы G элемент $h(\xi, \eta)$ преобразуется следующим образом:

$$h(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}) = \widetilde{h}^{-1} \cdot h(\xi, \eta) \cdot \widehat{h}, \tag{1.6}$$

где $\widetilde{h}$ и $\widehat{h}$ берутся из (1.1) и (1.2) соответственно.

Функция $k(\xi, \eta) = b(h(\xi, \eta))$ есть $N(\xi, \eta)^{-\varkappa}$, где $N(\xi, \eta)$ – неприводимый многочлен степени r по ξ и по η отдельно. Ее мы можем рассматривать как функцию на G/H – аналог ядра Бергмана для эрмитовых симметрических пространств. Из (1.6) следует, что под действием элемента $g \in G$ функция $N(\xi, \eta)$ преобразуется следующим образом

$$N(\widetilde{\xi}, \widehat{\eta}) = N(\xi, \eta) \cdot b(\widetilde{h})^{1/\varkappa} \cdot b(\widehat{h})^{-1/\varkappa} \tag{1.7}$$

Мера на G/H, инвариантная относительно G, в орисферических координатах есть

$$dx(\xi, \eta) = |N(\xi, \eta)|^{-\varkappa}\, d\xi\, d\eta.$$

Следующая таблица содержит список простых симметрических алгебр Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, которые отвечают параэрмитовым симметрическим пространствам G/H с простой G. По эстетическим причинам мы обозначаем алгебры Ли заглавными латинскими буквами вместо строчных готических.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
$\mathrm{SL}\,(n,R)$	$\mathrm{SL}\,(p,R)+\mathrm{SL}(q,R)+R$
$\mathrm{SU}^*(2n)$	$\mathrm{SU}^*(2\mathrm{p})+\mathrm{SU}^*(2\mathrm{q})+\mathrm{R}$
$\mathrm{SU}(n,n)$	$\mathrm{SL}\,(n,C)+R$
$\mathrm{SO}^*(4n)$	$\mathrm{SU}^*(2n)+R$
$\mathrm{SO}\,(n,n)$	$\mathrm{SL}\,(n,R)+R$
$\mathrm{SO}\,(p,q)$	$\mathrm{SO}\,(p-1,q-1)+R$
$\mathrm{Sp}\,(n,R)$	$\mathrm{SL}\,(n,R)+R$
$\mathrm{Sp}\,(n,n)$	$\mathrm{SU}^*(2n)+R$
$\mathrm{E}_{6(6)}$	$\mathrm{SO}\,(5,5)+R$
$\mathrm{E}_{6(-26)}$	$\mathrm{SO}\,(1,9)+R$
$\mathrm{E}_{7(7)}$	$\mathrm{E}_{6(6)}+R$
$\mathrm{E}_{7(-25)}$	$\mathrm{E}_{6(-26)}+R$

§ 2. Максимально вырожденные представления

В этом параграфе мы рассмотрим серии представлений группы G, индуцированных характерами максимальных параболических подгрупп $P^\pm$.

Пусть ω_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, обозначает следующий характер подгруппы H:

$$\omega_\lambda(h) = |b(h)|^{-\lambda/\varkappa}. \tag{2.1}$$

Распространим этот характер на подгруппы P^+ и P^-, полагая его равным 1 на Q^+ и Q^-. Рассмотрим индуцированные представления группы G:

$$\pi_\lambda^\pm = \mathrm{Ind}(G, P^\mp, \omega_{\mp\lambda}),$$

В некомпактной картине эти представления действуют в функциях $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ на $\mathfrak{q}^-$ и на $\mathfrak{q}^+$ соответственно следующим образом, см. (1.1) и (1.2):

$$(\pi_\lambda^-(g)\varphi)(\xi) = \omega_\lambda(\widetilde{h})\varphi(\widetilde{\xi}), \quad (\pi_\lambda^+(g)\psi)(\eta) = \omega_\lambda(\widehat{h})\psi(\widehat{\eta}). \tag{2.2}$$

Определим два оператора A_λ и B_λ:

$$(A_\lambda f)(\eta) = \int |N(\xi,\eta)|^{-\lambda-\varkappa} f(\xi)\, d\xi, \tag{2.3}$$

$$(B_\lambda f)(\xi) = \int |N(\xi,\eta)|^{-\lambda-\varkappa} f(\eta)\, d\eta, \tag{2.4}$$

где $d\xi$, $d\eta$ – инвариантные меры на $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$, соответственно. Оператор A_λ сплетает представление π_λ^- с представлением $\pi_{-\lambda-\varkappa}^+$, а оператор B_λ сплетает представление π_λ^+ с представлением $\pi_{-\lambda-\varkappa}^-$. Произведение $B_\lambda A_{-\lambda-\varkappa}$ есть скалярный оператор:

$$B_\lambda A_{-\lambda-\varkappa} = c(\lambda)^{-1}\cdot \mathrm{id}, \tag{2.5}$$

где $c(\lambda)$ – некоторая мероморфная функция от λ, она инвариантна относительно замены λ на $-\lambda-\varkappa$.

Представления $\pi^{\pm}_{\lambda}$ и операторы A_{λ} и B_{λ} можно распространить на обобщенные функции на $\mathfrak{q}^-$ и на $\mathfrak{q}^+$.

Представление π^{-}_{λ} алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дается некоторыми дифференциальными операторами первого порядка. Эти представления можно рассматривать на разных пространствах функций от ξ: например, на функциях класса C^{∞} на $\mathfrak{q}^-$, на пространстве $\mathrm{Pol}\,(\mathfrak{q}^-)$ многочленов от ξ, на пространстве $\mathcal{D}'(\mathfrak{q}^-)$ обобщенных функций на $\mathfrak{q}^-$, в частности, на пространстве Z обобщенных функций от ξ, сосредоточенных в нуле, и др. То же самое относится и к π^{+}_{λ}.

Отметим, что

$$\omega_{\lambda}\big(h(\xi,\eta)\big) = |N(\xi,\eta)|^{\lambda}. \tag{2.6}$$

Из (1.7) следует формула

$$|N(\widetilde{\xi},\widehat{\eta})|^{\lambda} = |N(\xi,\eta)|^{\lambda}\cdot\omega_{\lambda}(\widetilde{h})^{-1}\cdot\omega_{\lambda}(\widehat{h}),$$

которая может быть истолкована как свойство инвариантности функции $|N(\xi,\eta)|^{\lambda}$:

$$\Big[\pi^{-}_{\lambda}(g)\otimes\pi^{+}_{\lambda}(g)\Big]|N(\xi,\eta)|^{\lambda} = |N(\xi,\eta)|^{\lambda}.$$

§ 3. Полиномиальное квантование на параэрмитовых симметрических пространствах

В этом параграфе мы применяем к пространству G/H (параэрмитово симметрическое пространство произвольного ранга) схему квантования, предложенную в [2]. Мы используем другую – по сравнению с [2] – исходную алгебру операторов, а именно, в качестве алгебры операторов мы возьмем алгебру операторов $\pi^{-}_{\lambda}(X)$, $X\in\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, с параметром λ, действующих в функциях $\varphi(\xi)$, $\xi\in\mathfrak{q}^-$. В отличие от [2] мы используем некомпактную картину для представлений $\pi^{\pm}_{\lambda}$.

В качестве переполненной системы мы возьмем ядро оператора $A_{-\lambda-\varkappa}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\lambda}(\xi,\eta) = |N(\xi,\eta)|^{\lambda}, \tag{3.1}$$

Рассмотрим функции

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi(\xi,\eta)}\,(\pi^{-}_{\lambda}(X)\otimes 1)\Phi(\xi,\eta), \tag{3.2}$$

где $X\in\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$. Рассмотрим ξ,η как орисферические координаты на G/H. Тогда функции $F(\xi,\eta)$ превратятся в функции на G/H. Обозначим пространство этих функций через $\mathcal{A}_{\lambda}$. Назовем функцию F из $\mathcal{A}_{\lambda}$, определенную формулой (3.2), *ковариантным символом* оператора $D=\pi^{-}_{\lambda}(X)$, $X\in\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$.

Ковариантные символы являются многочленами на пространстве G/H.

В частности, ковариантный символ тождественного оператора есть тождественная единица на G/H. Для операторов $\pi^{-}_{\lambda}(X)$, отвечающих элементам X алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ковариантный символ есть с точностью до множителя, зависящего от λ, линейная функция $B_{\mathfrak{g}}(X,x)$, где $B_{\mathfrak{g}}$ – форма Киллинга, $x\in G/H\subset\mathfrak{g}$.

Оператор D восстанавливается по своему ковариантному символу F следующим образом:

$$(D\varphi)(\xi) = c \int F(\xi, v)\, \frac{\Phi(\xi, v)}{\Phi(u, v)}\, \varphi(u)\, dx(u, v), \tag{3.3}$$

где $c = c(\lambda)$ берется из формулы (2.5). В самом деле, функция Φ обладает воспроизводящим свойством:

$$\varphi(\xi) = c \int \frac{\Phi(\xi, v)}{\Phi(u, v)}\, \varphi(u)\, dx(u, v),$$

которое есть не что иное, как формула (2.5), переписанная в другой форме. Применяя к обеим частям этого равенства оператор D и используя (2.2), получим (3.3).

Пусть U – представление группы G сдвигами в функциях на G/H (квазирегулярное представление) – например, в пространстве $C^\infty(G/H)$. Пусть U – соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Соответствие $D \mapsto F$, сопоставляющее оператору его ковариантный символ, является $\mathfrak{g}$-эквивариантным, т.е. если F – ковариантный символ оператора $D = \pi_\lambda^-(X)$, $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, то $U(L)F$, где $L \in \mathfrak{g}$, является ковариантным символом оператора $\pi_\lambda^-(\mathrm{ad}\, L \cdot X) \otimes 1$.

Для λ общего положения пространство $\mathcal{A}_\lambda$ есть пространство $S(G/H)$ всех многочленов на G/H.

Умножение операторов порождает умножение ковариантных символов, обозначим последнее звездочкой $*$. Именно, пусть $D = D_1 D_2$ и пусть F, F_1, F_2 – ковариантные символы операторов D, D_1, D_2, соответственно. Тогда $F = F_1 * F_2$. Из (2.2) имеем

$$F_1 * F_2 = \frac{1}{\Phi}\, (D_1 \otimes 1)(\Phi F_2).$$

Полагая теперь в (3.3) $D = D_1$ и $\varphi(u) = \Phi(u, \eta)\, F_2(u, \eta)$, находим

$$(F_1 * F_2)(\xi, \eta) = \int F_1(\xi, v) F_2(u, \eta) \mathcal{B}(\xi, \eta; u, v)\, dx(u, v), \tag{3.4}$$

где

$$\mathcal{B}(\xi, \eta; u, v) = c\, \frac{\Phi(\xi, v)\Phi(u, \eta)}{\Phi(\xi, \eta)\Phi(u, v)}. \tag{3.5}$$

Назовем это ядро $\mathcal{B}$ *ядром Березина.* Его можно рассматривать как функцию от двух переменных на G/H: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x; y)$, $x, y \in G/H$. Оно инвариантно относительно G:

$$\mathcal{B}(\mathrm{Ad}\, g \cdot x,\ \mathrm{Ad}\, g \cdot y) = \mathcal{B}(x, y).$$

Рассмотрим преобразование $x \mapsto \check{x}$ пространства G/H, которое в орисферических координатах ξ, η есть перестановка ξ и η : $(\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi)$. Это преобразование вызывает преобразование $F \mapsto \check{F}$ функций из $S(G/H)$: $\check{F}(\xi, \eta) = F(\eta, \xi)$. Ядро Березина инвариантно относительно одновременной перестановки $\xi \leftrightarrow \eta$ и $u \leftrightarrow v$. Отсюда по (4.7) следует, что преобразование $F \mapsto \check{F}$ является антиинволюцией относительно умножения символов:

$$(F_1 * F_2)^\vee = \check{F}_2 * \check{F}_1.$$

Для операторов D преобразование символов $F \mapsto \breve{F}$ означает сопряжение $D \mapsto \breve{D}$ относительно билинейной формы, порождаемой оператором A_λ:

$$(A_\lambda \varphi, \psi) = \int |N(\xi, \eta)|^{-\lambda - \varkappa} \varphi(\xi)\psi(\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Кроме того, если $D = \pi_\lambda^-(X)$, то

$$\breve{D} = \pi_\lambda^+(X^\vee),$$

где $X \mapsto X^\vee$ есть преобразование алгебры $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, порождаемое взятием обратного элемента в группе G.

Таким образом, пространство $\mathcal{A}_\lambda$ является ассоциативной алгеброй с единицей относительно умножения $*$. Преобразование $F \mapsto \breve{F}$ является антиинволюцией этой алгебры.

Определим теперь *контравариантные символы.* В соответствии с общей схемой функция $F(\xi, \eta)$ есть контравариантный символ для следующего оператора A (действующего на функции $\varphi(\xi)$):

$$(A\varphi)(\xi) = c \int F(u, v)\, \frac{\Phi(\xi, v)}{\Phi(u, v)}\, \varphi(u)\, dx(u, v) \tag{3.6}$$

(отличие от (3.3) только в первом аргументе функции F).

Если многочлен F из $S(G/H)$ является одновременно ковариантным символом оператора $D = \pi_\lambda^-(X)$, $X \in \mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$, и контравариантным символом оператора A, то $A = \pi^-_{-\lambda-\varkappa}(X^\vee)$. Следовательно, A получается из D сопряжением относительно формы

$$(F, f) = \int F(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

В терминах ядер это означает, что ядро $L(\xi, u)$ оператора A получается из ядра $K(\xi, u)$ оператора D перестановкой аргументов и заменой λ на $-\lambda - \varkappa$.

Соответствие $F \mapsto A$, которое каждому F из $\mathcal{A}_{-\lambda-\varkappa}$ сопоставляет оператор A с контравариантным символом F, является $\mathfrak{g}$-эквивариантным, а именно, многочлен $U(L)F$, где $L \in \mathfrak{g}$, является контравариантным символом оператора $\left[\pi^-_{-\lambda-\varkappa}(L)_\xi, A\right]$.

Таким образом, мы имеем два отображения: $D \mapsto F$ ("ко") и $F \mapsto A$ ("контра"), связывающие операторы в функциях от ξ и многочлены на G/H.

Композицию $\mathcal{O}$ =(контра)$\circ$(ко), отображающую оператор в оператор: $D \mapsto A$, мы уже рассмотрели выше, мы видели, что $\mathcal{O}$ есть отображение

$$\pi_\lambda^-(X) \longmapsto \pi^-_{-\lambda-\varkappa}(X^\vee).$$

Оно коммутирует с присоединенным представлением ad. Такое преобразование отсутствовало в теории Березина для эрмитовых симметрических пространств.

Композиция $\mathcal{B}$ =(ко)$\circ$(контра) отображает контравариантный символ $\overset{\circ}{F}$ оператора D в его ковариантный символ F. Назовем $\mathcal{B}$ *преобразованием Березина.* Ядро этого преобразования есть ядро Березина.

Сформулируем нерешенные задачи (для произвольного ранга): найти выражение преобразования Березина $\mathcal{B}$ через операторы Лапласа – образующие в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на G/H, найти его собственные числа на неприводимых составляющих, найти полное его асимптотическое разложение при $\lambda \to -\infty$. Эти задачи решены для пространств ранга один и для пространств с группой $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$, в последнем случае ранг пространства равен двум.

Первые два члена асимптотического разложения преобразования Березина $\mathcal{B}$ при $\lambda \to -\infty$ таковы:

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{\lambda}\,\Delta, \tag{3.7}$$

где Δ – оператор Лапласа-Бельтрами. Из соотношения (3.7) вытекает принцип соответствия (в качестве "постоянной Планка"надо взять $h = -1/\lambda$):

$$\begin{array}{rcl} F_1 * F_2 & \longrightarrow & F_1 F_2, \\ -\lambda\,(F_1 * F_2 - F_2 * F_1) & \longrightarrow & \{F_1,\, F_2\}. \end{array}$$

§ 4. Надгруппа и полиномиальное квантование

В качестве надгруппы для G возьмем прямое произведение $\widetilde{G} = G \times G$. Группа G содержится в $\widetilde{G}$ как диагональ $\{(g,g)\}$, $g \in G$.

Сначала опишем некоторую серию R_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, представлений группы $\widetilde{G}$.

Пусть $\widetilde{P}$ – параболическая подгруппа группы $\widetilde{G}$, состоящая из элементов (zh, hn), $z \in Q^-$, $n \in Q^+$, $h \in H$. Пусть $\widetilde{\omega}_\lambda$ – характер этой подгруппы, равный $\omega_\lambda(h)$ на указанных элементах. Представление R_λ группы $\widetilde{G}$ – это представление, индуцированное характером $\widetilde{\omega}_\lambda$ подгруппы $\widetilde{P}$.

Укажем реализации представлений R_λ.

Пусть $\mathcal{C}$ – многообразие двойных классов смежности

$$y = s_1^{-1} Q^- Q^+ s_2, \quad s_1, s_2 \in G.$$

Это многообразие – аналог конуса для представлений псевдо-ортогональной группы, связанных с конусом. Представление R_λ действует в пространстве функций f класса C^∞ на $\mathcal{C}$, удовлетворяющих условию однородности

$$f(s_1^{-1} h Q^- Q^+ s_2) = \omega_\lambda(h) f(s_1^{-1} Q^- Q^+ s_2), \tag{4.1}$$

следующим образом:

$$\big(R_\lambda(g_1, g_2) f\big)(y) = f(g_1^{-1} y g_2), \;\; g_1, g_2 \in G. \tag{4.2}$$

Возьмем в $\mathcal{C}$ два подмногообразия (сечения): "гиперболическое" сечение $\mathcal{X}$ и "параболическое" сечение Γ.

Многообразие $\mathcal{X}$ есть подмногообразие в $\mathcal{C}$, состоящее из классов смежности $x = s^{-1} Q^- Q^+ s$, $s \in G$. Стационарная подгруппа начальной точки $x^0 = Q^- Q^+$

есть H, так что $\mathcal{X}$ можно отождествить с G/H. Многообразие Γ есть подмногообразие в $\mathcal{C}$, состоящее из классов смежности

$$\gamma = \exp(-\eta) Q^- Q^+ \exp\xi, \quad \xi \in \mathfrak{q}^-, \ \eta \in \mathfrak{q}^+. \tag{4.3}$$

Это многообразие можно отождествить с $\mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+$. Вложение $\mathfrak{q}^- \times \mathfrak{q}^+ \hookrightarrow G/H$ в терминах $\mathcal{C}$ выглядит следующим образом.

Пусть точка $x = s^{-1}Q^-Q^+s$, $s \in G$, имеет орисферические координаты ξ, η. По (1.4) и (1.5) имеем

$$\exp\xi \cdot \exp(-\eta) = \exp(-Y) \cdot \exp X \cdot h_0, \ h_0 = h(\xi,\eta), \tag{4.4}$$

$$s = \exp Y \exp\xi = \exp X \cdot h_0 \cdot \exp\eta. \tag{4.5}$$

Поэтому мы можем записать точку x в виде

$$\begin{aligned} x &= s^{-1}Q^-Q^+s \\ &= \exp(-\eta) \cdot h_0^{-1} Q^- Q^+ \exp\xi. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Таким образом, указанное вложение сопоставляет точке $\gamma \in \Gamma$, задаваемой формулой (4.3), точку $x \in \mathcal{X}$, задаваемую формулой (4.6), где $h_0 = h(\xi, \eta)$.

Представление R_λ можно реализовать в функциях на этих многообразиях $\mathcal{X}$ и Γ.

Сначала рассмотрим $\mathcal{X}$. Пусть $x = s^{-1}Q^-Q^+s$, $g_1, g_2 \in G$. Тогда $g_1^{-1}xg_2 = g_1^{-1}s^{-1}Q^-Q^+sg_2$. Возьмем элемент $sg_2(sg_1)^{-1}$, т.е. элемент $sg_2g_1^{-1}s^{-1}$, и разложим его по Гауссу:

$$sg_2g_1^{-1}s^{-1} = \exp(-Y^*) \cdot \exp X^* \cdot h^*, \ X^* \in \mathfrak{q}^-, \ Y^* \in \mathfrak{q}^+. \tag{4.7}$$

Здесь элемент $h^* \in H$ не зависит от выбора представителя s класса смежности. Образуем элемент s^*:

$$s^* = \exp Y^* \cdot sg_2 = \exp X^* \cdot h^* sg_1. \tag{4.8}$$

Этому элементу отвечает точка $x^* \in G/H$:

$$x^* = (s^*)^{-1} Q^- Q^+ s^*. \tag{4.9}$$

По (4.8) она есть

$$x^* = g_1^{-1} s^{-1} (h^*)^{-1} Q^- Q^+ s g_2. \tag{4.10}$$

Следовательно,

$$f(x^*) = \omega_\lambda((h^*)^{-1}) f(g_1^{-1} x g_2), \tag{4.11}$$

и потому R_λ действует в функциях на G/H следующим образом:

$$\big(R_\lambda(g_1, g_2) f\big)(x) = \omega_\lambda(h^*) f(x^*). \tag{4.12}$$

Теорема 4.1 *В орисферических координатах* ξ, η *на* G/H *представление* R_λ *действует так:*

$$\big(R_\lambda(g_1, g_2)f\big)(\xi, \eta) = \frac{\Phi_\lambda(\xi \bullet g_2, \eta \circ g_1)}{\Phi_\lambda(\xi, \eta)}\ \omega_\lambda(\widetilde{h}_2)\ \omega_\lambda(\widehat{h}_1^{-1})\ f(\xi \bullet g_2, \eta \circ g_1), \qquad (4.13)$$

где $\widetilde{h}_2$ *и* $\widehat{h}_1$ *берутся из разложений (1.1) и (1.2) с* $g = g_2$ *и* $g = g_1$*, соответственно.*

Доказательство. Пусть точка $x = s^{-1}Q^-Q^+s$, $s \in G$, имеет орисферические координаты ξ, η. По (4.5) и (1.1), (1.2) мы имеем

$$\begin{aligned} sg_2 &= \exp Y \cdot \exp \xi\ \cdot g_2 = \exp Y \cdot \exp Y_2\ \cdot \widetilde{h}_2 \cdot \exp \widetilde{\xi}_2, \\ sg_1 &= \exp X \cdot h_0 \cdot \exp \eta\ \cdot g_1 = \exp X \cdot h_0 \cdot \exp X_1 \cdot \widehat{h}_1 \cdot \exp \widehat{\eta}_1. \end{aligned}$$

где $\widetilde{\xi}_2 = \xi \bullet g_2$, $\widehat{\eta}_1 = \eta \circ g_1$. Поэтому

$$s^* = \exp Y^* \cdot sg_2 = \exp Y_3\ \cdot \widetilde{h}_2 \cdot \exp \widetilde{\xi}_2, \qquad (4.14)$$

$$s^* = \exp X^* \cdot sg_1 = \exp X_3 \cdot h^* \cdot h_0 \cdot \widehat{h}_1 \cdot \exp \widehat{\eta}_1. \qquad (4.15)$$

Следовательно, используя (4.14) и (4.15), мы получаем

$$\begin{aligned} x^* &= (s^*)^{-1}Q^-Q^+s^* \\ &= \exp \widehat{\eta}_1 \cdot (h^*h_0\widehat{h}_1)^{-1}Q^-Q^+\widetilde{h}_2 \cdot \exp \widetilde{\xi}_2 \\ &= \exp \widehat{\eta}_1 \cdot (h^*h_0\widehat{h}_1)^{-1}\widetilde{h}_2 \cdot Q^-Q^+ \cdot \exp \widetilde{\xi}_2. \end{aligned}$$

По условию однородности (4.1) имеем

$$f(x^*) = f(\exp \widehat{\eta}_1 \cdot Q^-Q^+ \cdot \exp \widetilde{\xi}_2) \cdot \omega_\lambda\big((h^*h_0\widehat{h}_1)^{-1}\widetilde{h}_2\big) \qquad (4.16)$$

С другой стороны, по (4.6) мы можем записать точку x^* в виде

$$x^* = \exp \widehat{\eta}_1 \cdot (h_0^*)^{-1}Q^-Q^+ \cdot \exp \widetilde{\xi}_2,$$

где $h_0^* = h(\widetilde{\xi}_2, \widehat{\eta}_1)$. Отсюда снова по условию однородности (4.1) получаем

$$f(x^*) = f(\exp \widehat{\eta}_1 \cdot Q^-Q^+ \cdot \exp \widetilde{\xi}_2) \cdot \omega_\lambda\big((h_0^*)^{-1}\big). \qquad (4.17)$$

Сравнивая (4.16) и (4.17), получаем

$$\omega_\lambda\big(\widehat{h}_1^{-1}h_0^{-1}(h^*)^{-1}\widetilde{h}_2\big) = \omega_\lambda\big((h_0^*)^{-1}\big),$$

откуда

$$\omega_\lambda(h^*) = \frac{\omega_\lambda(h_0^*)}{\omega_\lambda(h_0)}\omega_\lambda(\widehat{h}_1^{-1})\omega_\lambda(\widetilde{h}_2).$$

Подставим это в (4.12) и вспомним (2.6) и (3.1), в результате получим (4.13). □

Аналогично, если реализовать представление R_λ в функциях на многообразии Γ, то мы получим, что оно выражается формулой:

$$\big(R_\lambda(g_1,g_2)f\big)(\xi,\eta)=\omega_\lambda(\widetilde{h}_2)\ \omega_\lambda(\widehat{h}_1^{-1})\ f(\xi\bullet g_2,\eta\circ g_1). \tag{4.18}$$

Это показывает, что R_λ эквивалентно тензорному произведению:

$$R_\lambda(g_1,g_2)=\pi_\lambda^-(g_2)\otimes\pi_\lambda^+(g_1).$$

Группа $\widetilde{G}$ содержит 3 подгруппы, изоморфные G. Первая – диагональная подгруппа, состоящая из пар (g,g), $g\in G$. Ограничение представления R_λ на эту подгруппу есть представление U сдвигами на G/H:

$$\big(R_\lambda(g,g)f\big)(x)=f(g^{-1}xg).$$

В самом деле, из (4.7) и (4.8) при $g_1=g_2=g$ получаем $h^*=e$ и $s^*=sg$.

Другие две подгруппы G_1 и G_2 состоят из пар (g,e), (e,g), $g\in G$, соответственно.

В силу теоремы 4.1 ограничение представления R_λ на подгруппу G_2 дается формулой

$$\begin{aligned}\big(R_\lambda(e,g)f\big)(\xi,\eta) &= \frac{\Phi_\lambda(\widetilde{\xi},\eta)}{\Phi_\lambda(\xi,\eta)}\ \omega_\lambda(\widetilde{h})f(\widetilde{\xi},\eta)\\ &= \frac{1}{\Phi_\lambda(\xi,\eta)}\big(\pi_\lambda^-(g)\otimes 1\big)\Big[f(\xi,\eta)\Phi_\lambda(\xi,\eta)\Big].\end{aligned}$$

Аналогично, ограничение представления R_λ на подгруппу G_1 дается формулой

$$\big(R_\lambda(g,e)f\big)(\xi,\eta=\frac{1}{\Phi_\lambda(\xi,\eta)}\big(1\otimes\pi_\lambda^+(g)\big)\Big[f(\xi,\eta)\Phi_\lambda(\xi,\eta)\Big].$$

Перейдем от группы G к ее универсальной обертывающей алгебре $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ и сохраним обозначения для представлений. Возьмем в качестве f функцию f_0, тождественно равную единице. Тогда для $X\in\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ имеем

$$(R_\lambda(0,X)f_0)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_\lambda(\xi,\eta)}(\pi_\lambda^-(X)\otimes 1)\Phi_\lambda(\xi,\eta), \tag{4.19}$$

$$(R_{-\lambda-\varkappa}(X,0)f_0)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_\lambda(\xi,\eta)}(1\otimes\pi_{-\lambda-\varkappa}^+(X))\Phi_{-\lambda-\varkappa}(\xi,\eta). \tag{4.20}$$

Правые части формул (4.19) и (4.20) – это как раз ковариантный и контравариантный символы оператора $D=\pi_\lambda^-(X)$ из полиномиального квантования.

Обозначим через $\widehat{R}_\lambda$ представление, которое получается из R_λ перестановкой аргументов. Используя реализацию представления R_λ на сечении Γ, мы получаем, что тензорное произведение $A_\lambda\otimes B_\lambda$ сплетает представление R_λ с представлением $\widehat{R}_{-\lambda-\varkappa}$. Переходя от Γ к $\mathcal{X}$ и заменяя λ на $-\lambda-\varkappa$, мы получаем, что оператор $c(\lambda)A_{-\lambda-\varkappa}\otimes B_{-\lambda-\varkappa}$ сплетает представление $\widehat{R}_{-\lambda-\varkappa}$ с представлением R_λ и переводит контравариантные символы в ковариантные. Он имеет ядро $\mathcal{B}_\lambda(\xi,\eta;u,v)$, т.е. он есть в точности преобразование Березина.

§ 5. Пример: однополостный гиперболоид

В этом параграфе мы рассматриваем ключевой пример. Пространство G/H есть однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Группа G есть $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, подгруппа H состоит из диагональных матриц, надгруппа $\widetilde{G} = G \times G$ локально изоморфна псевдо-ортогональной группе $\mathrm{SO}_0(2,2)$ (накрывает ее с кратностью 2). В этом конкретном примере мы несколько меняем обозначения по сравнению с предыдущими параграфами, например, по традиции мы вместо λ в обозначении представлений группы G пишем 2σ, кроме того, мы рассматриваем несколько больший запас представлений группы G (кроме параметра σ появляется еще параметр ε).

1. *Группы, подгруппы, конус, сечения*

Группа $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Подгруппы H, Z, N of G состоят соответственно из матриц

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad z_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad n_\eta = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Имеют место разложения Гаусса и "анти-Гаусса"группы G: $G = \overline{NHZ}$ и $G = \overline{ZHN}$. Группа G действует на Z и N дробно-линейными преобразованиями:

$$\xi \mapsto \xi \bullet g = \frac{\alpha\xi + \gamma}{\beta\xi + \delta}, \quad \eta \mapsto \eta \circ g = \frac{\delta\eta + \beta}{\gamma\eta + \alpha}.$$

Эти действия получаются при разложении $z_\xi g$ "по Гауссу"и $n_\eta g$ "по анти-Гауссу". Мы можем свести второе действие к первому: $\eta \circ g = \eta \bullet \widehat{g}$, где

$$\widehat{g} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Мы считаем, что группы действуют справа, в соответствии с этим мы записываем векторы в виде строки.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^4$ следующую билинейную форму:

$$[x, y] = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Реализуем $\mathbb{R}^4$ как пространство $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ вещественных матриц размера 2×2:

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - x_4 & -x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 & x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $x^\natural$ матрицу, соответствующую вектору xJ, $J = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}$. Тогда форма $[x, y]$ может быть записана через матрицы: $[x, y] = -2\,\mathrm{tr}\left(x^\natural y\right)$.

В качестве надгруппы для G мы берем прямое произведение $\widetilde{G} = G \times G$. Надгруппа действует на $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ следующим образом: паре $(g_1, g_2) \in \widetilde{G}$ ставится в соответствие преобразование

$$x \mapsto g_1^{-1} x g_2. \tag{5.1}$$

Это действие сохраняет $\det\, x = -(1/4)[x, x]$. Поэтому $\widetilde{G}$ накрывает группу $\mathrm{SO}_0(2, 2)$ с кратностью 2, ядро гомоморфизма состоит из двух пар: (e, e) и $(-e, -e)$, e – единичная матрица в G.

Пусть $\mathcal{C}$ – конус $[x, x] = 0, x \neq 0$ (или $\det\, x = 0,\ x \neq 0$) в $\mathbb{R}^4$. Возьмем в конусе $\mathcal{C}$ две точки:

$$s^- = (1, 0, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s^+ = (1, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и два параболических сечения $\Gamma^- = \{[x, s^+] = -2\}$ и $\Gamma^+ = \{[x, s^-] = -2\}$, содержащих s^- и s^+ соответственно.

Рассмотрим в $\widetilde{G}$ две унипотентных подгруппы Q^- и Q^+, состоящих соответственно из пар (z_ξ, n_η) и (n_η, z_ξ). Они действуют просто транзитивно на сечениях Γ^- и Γ^+ соответственно и переводят точки s^- и s^+ соответственно в точки

$$\begin{aligned} u &= u(\xi, \eta) = (1 - \xi\eta,\ -\xi - \eta,\ -\xi + \eta,\ -1 - \xi\eta), \\ v &= v(\xi, \eta) = (1 - \xi\eta,\ \xi + \eta,\ \xi - \eta,\ 1 + \xi\eta), \end{aligned}$$

Пусть $u = u(\xi_1, \eta_1)$ и $v = v(\xi_2, \eta_2)$, тогда

$$[u, v] = -2N(\xi_1, \eta_2)N(\xi_2, \eta_1), \tag{5.2}$$

где

$$N(\xi, \eta) = 1 - \xi\eta.$$

В терминах матриц векторы u и v имеют вид:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ -\xi & -\xi\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\xi \end{pmatrix} (1 \quad \eta), \quad v = \begin{pmatrix} -\xi\eta & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta \\ 1 \end{pmatrix} (\xi \quad 1).$$

Они связаны соотношением: $u = vJ$ или $u = v^\natural$.

Пусть $\mathcal{X}$ – сечение конуса $\mathcal{C}$ плоскостью $x_1 = 1$ (или $\mathrm{tr}\, x = 1$). Это однополостный гиперболоид: $-x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$.

Используя отображения точек вдоль образующих конуса $\mathcal{C}$, мы получим действия надгруппы $\widetilde{G}$ на сечениях. Пусть $(g_1, g_2) \in \widetilde{G}$. Для $\mathcal{X}$ мы имеем:

$$x \mapsto \widetilde{x} = \frac{g_1^{-1} x g_2}{\mathrm{tr}(g_1^{-1} x g_2)}. \tag{5.3}$$

Для Γ^- и Γ^+ эти действия задаются дробно-линейными преобразованиями по ξ и по η:

$$u(\xi, \eta) \mapsto u(\xi \bullet g_1, \eta \circ g_2), \quad v(\xi, \eta) \mapsto v(\xi \bullet g_2, \eta \circ g_1).$$

Каждое сечение Γ^- и Γ^+ отображается на $\mathcal{X}$ вдоль образующих (почти всюду):

$$u \mapsto x = \frac{u}{u_1} = \frac{u(\xi,\eta)}{N(\xi,\eta)}, \quad v \mapsto y = \frac{v}{v_1} = \frac{v(\xi,\eta)}{N(\xi,\eta)}.$$

Эти отображения дают две системы координат ξ, η на $\mathcal{X}$:

$$x = \Big(1, -\frac{\xi+\eta}{N(\xi,\eta)}, \; -\frac{\xi-\eta}{N(\xi,\eta)}, \; -\frac{1+\xi\eta}{N(\xi,\eta)}\Big),$$
$$y = \Big(1, \frac{\xi+\eta}{N(\xi,\eta)}, \; \frac{\xi-\eta}{N(\xi,\eta)}, \; \frac{1+\xi\eta}{N(\xi,\eta)}\Big).$$

Назовем эти координаты *орисферическими координатами*, соответствующими Γ^- и Γ^+. Эти системы связаны следующим образом: $x = yJ$ или $x = y^\natural$.

Возьмем следующие меры на сечениях $\mathcal{X}$, Γ^- и Γ^+:

$$dx = |x_4|^{-1} dx_2\, dx_3, \quad du = d\xi\, d\eta, \quad dv = d\xi\, d\eta.$$

При отображениях, указанных выше, меры преобразуются следующим образом:

$$dx = dy = 2N(\xi,\eta)^{-2} d\xi\, d\eta.$$

2. *Представления группы* $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Представления $T_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, группы G действуют в функциях $\varphi(\xi)$ на $\mathbb{R}$ следующим образом:

$$(T_{\sigma,\varepsilon}(g)\varphi)(\xi) = \varphi(\xi \bullet g)(\beta\xi + \delta)^{2\sigma,\varepsilon},$$

здесь мы используем обозначение:

$$t^{\lambda,\nu} = |t|^\lambda \mathrm{sgn}^\nu t, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \nu = 0, 1, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Наряду с этими представлениями рассмотрим представления $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g) = T_{\sigma,\varepsilon}(\widehat{g})$, так что

$$(\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g)\psi)(\eta) = \psi(\eta \circ g)(\gamma\eta + \alpha)^{2\sigma,\varepsilon}$$

(заметим, что $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{\sigma,\varepsilon}$ эквивалентны). Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$, определенный формулой

$$(A_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \xi\eta)^{-2\sigma-2,\varepsilon} \varphi(\xi)\, d\xi,$$

сплетает $T_{\sigma,\varepsilon}$ с $\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}$ а также $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ с $T_{-\sigma-1,\varepsilon}$. Произведение $A_{-\sigma-1,\varepsilon}A_{\sigma,\varepsilon}$ есть скалярный оператор:

$$A_{-\sigma-1,\varepsilon}A_{\sigma,\varepsilon} = \omega(\sigma,\varepsilon) \cdot \mathrm{id},$$

где

$$\omega(\sigma,\varepsilon) = \frac{2\pi}{2\sigma+1} \mathrm{tg} \frac{2\sigma-\varepsilon}{2}\pi.$$

Заметим, что

$$\omega(-\sigma-1,\varepsilon)=\omega(\sigma,\varepsilon). \tag{5.4}$$

3. *Представления надгруппы $\widetilde{G}=G\times G$ связанные с конусом*

Обозначим через $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{C})$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\nu=0,1$, пространство функций $f\in C^\infty(\mathcal{C})$, удовлетворяющих условию:

$$f(tx)=t^{\lambda,\nu}f(x),\quad x\in\mathcal{C},\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Пусть $R_{\lambda,\nu}$ – представление надгруппы $\widetilde{G}$ в $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}(\mathcal{C})$ сдвигами:

$$(R_{\lambda,\nu}(g_1,g_2)f)(x)=f(g_1^{-1}xg_2).$$

Фактически оно есть представление группы $\mathrm{SO}_0(2,2)$, связанное с конусом [1]. Это представление может быть реализовано в функциях на сечениях конуса $\mathcal{C}$, см. пункт 1. В реализации на $\mathcal{X}$ представление $R_{\lambda,\nu}$ есть (см. (5.3)):

$$(R_{\lambda,\nu}(g_1,g_2)f)(x)=f(\widetilde{x})\left\{\mathrm{tr}(g_1^{-1}xg_2)\right\}^{\lambda,\nu},\ x\in\mathcal{X}.$$

На Γ^- и на Γ^+ мы имеем соответственно:

$$(R_{\lambda,\nu}(g_1,g_2)f)(\xi,\eta)=f(\xi\bullet g_1,\eta\circ g_2)\Big\{(\beta_1\xi+\delta_1)(\gamma_2\eta+\alpha_2)\Big\}^{\lambda,\nu}, \tag{5.5}$$

$$(R_{\lambda,\nu}(g_1,g_2)f)(\xi,\eta)=f(\xi\bullet g_2,\eta\circ g_1)\Big\{(\beta_2\xi+\delta_2)(\gamma_1\eta+\alpha_1)\Big\}^{\lambda,\nu}. \tag{5.6}$$

Формулы (5.5) и (5.6) показывают, что $R_{\lambda,\nu}(g_1,g_2)$ есть тензорное произведение $T_{\sigma,\varepsilon}(g_1)\otimes\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g_2)$ и $T_{\sigma,\varepsilon}(g_2)\otimes\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g_1)$, соответственно, с $\sigma=\lambda/2$.

Определим оператор $B_{\lambda,\,\nu}$ в $\mathcal{X}$-реализации:

$$(B_{\lambda,\,\nu}f)(x)=\int_{\mathcal{X}}[x,y]^{-\lambda-2,\nu}f(y)\,dy,\ x\in\mathcal{X}. \tag{5.7}$$

Он сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $R_{-\lambda-2,\nu}$. Оператор действует из Γ^- в Γ^+ следующим образом:

$$(B_{\lambda,\,\nu}f)(u)=2\int_{\Gamma^+}[u,v]^{-\lambda-2,\nu}f(v)\,dv,\quad u\in\Gamma^-,$$

и аналогично из Γ^- в Γ^+. Согласно (5.2) он может быть записан

$$(B_{\lambda,\,\nu}f)(\xi_1,\eta_1)=(-1)^\nu 2^{-\lambda-1}\int_{\Gamma^+}\Big[N(\xi_1,\eta_2)N(\xi_2,\eta_1)\Big]^{-\lambda-2,\nu}f(\xi_2,\eta_2)\,d\xi_2 d\eta_2.$$

Это показывает, что

$$B_{\lambda,\,\nu}=(-1)^\nu 2^{-\lambda-1}A_{\sigma,\nu}\otimes A_{\sigma,\nu},\quad \sigma=\lambda/2.$$

Поэтому

$$B_{\lambda,\nu}B_{-\lambda-2,\nu}=\bigl[\omega(\lambda/2,\nu)\bigr]^2\cdot\mathrm{id}. \tag{5.8}$$

Вернемся к $\mathcal{X}$-реализации и используем *обе* орисферические системы координат. Тогда

$$(B_{\lambda,\nu}f)(x)=(-1)^\nu 2^{-\lambda-2}\int_{\mathcal{X}}\Bigl[\frac{N(\xi_1,\eta_2)N(\xi_2,\eta_1)}{N(\xi_1,\eta_1)N(\xi_2,\eta_2)}\Bigr]^{-\lambda-2,\nu}f(y)\,dy, \tag{5.9}$$

где x и y имеют координаты ξ_1,η_1 и ξ_2,η_2 в орисферических системах координат, соответствующих Γ^- и Γ^+.

4. *Символы Березина и преобразование Березина*

Группа $\widetilde{G}$ содержит три подгруппы, изоморфные группе G. Первая подгруппа – диагональная, состоящая из (g,g), $g\in G$. Она сохраняет $\mathcal{X}$ относительно действия (5.1), так что $\mathcal{X}=G/H$. Мера dx инвариантна относительно этого действия. Представление $R_{\lambda,\nu}$ есть представление сдвигами:

$$R_{\lambda,\nu}(g,g)f(x)=f(g^{-1}xg).$$

Дгугие две подгруппы G_1 и G_2 состоят соответственно из пар (g,e) и (e,g), $g\in G$. Согласно (5.6) мы имеем на Γ^+:

$$(R_{\lambda,\nu}(e,g)f)(\xi,\eta)=f(\xi\bullet g,\eta)(\beta\xi+\delta)^{\lambda,\nu}.$$

Поэтому в орисферических координатах на $\mathcal{X}$, соответствующих Γ^+, мы имеем

$$(R_{\lambda,\nu}(e,g)f)(\xi,\eta)=\Bigl[\frac{1}{N(\xi,\eta)}\Bigr]^{\lambda,\nu}f(\xi\bullet g,\eta)N(\xi\bullet g,\eta)^{\lambda,\nu}(\beta\xi+\delta)^{\lambda,\nu}. \tag{5.10}$$

Это можно записать следующим образом. Возьмем функцию

$$\Phi_{\lambda,\nu}(\xi,\eta)=N(\xi,\eta)^{\lambda,\nu}.$$

(ядро сплетающего оператора для G (см. пункт 2)), она является аналогом переполненной системы Березина. Тогда (5.10) есть

$$(R_{\lambda,\nu}(e,g)f)(\xi,\eta)=\frac{1}{\Phi_{\lambda,\nu}(\xi,\eta)}(T_{\lambda/2,\nu}(g)\otimes 1)\bigl[f(\xi,\eta)\Phi_{\lambda,\nu}(\xi,\eta)\bigr].$$

Аналогично в орисферических координатах на $\mathcal{X}$, соответствующих Γ^-, мы получим

$$(R_{\lambda,\nu}(e,g)f)(\xi,\eta)=\frac{1}{\Phi_{\lambda,\nu}(\xi,\eta)}(1\otimes\widehat{T}_{\lambda/2,\nu}(g))\bigl[f(\xi,\eta)\Phi_{\lambda,\nu}(\xi,\eta)\bigr].$$

(аналогичные формулы для (g,e)). Перейдем от группы G к ее универсальной обертывающей алгебре $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ и сохраним те же обозначения для представлений.

Тогда зависимость представлений от ν исчезнет, и мы опустим ν в обозначении для них. Теперь возьмем в качестве f функцию f_0, тождественно равную 1, тогда для $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ мы получим

$$(R_\lambda(0,X)f_0)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_{\lambda,\nu}(\xi,\eta)}(T_{\lambda/2}(X)\otimes 1)\Phi_{\lambda,\nu}(\xi,\eta),$$
$$(R_{-\lambda-2}(0,X)f_0)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_{-\lambda-2,\nu}(\xi,\eta)}(1\otimes \widehat{T}_{-\lambda/2-1}(X))\Phi_{-\lambda-2,\nu}(\xi,\eta).$$

Правые части этих формул есть в точности *ковариантный* и *контравариантный* символы оператора $T_{\lambda/2}(X)$ в полиномиальном квантовании.

Мы можем нормализовать оператор $B_{-\lambda-2,\nu}$ так, чтобы нормализованный оператор $Q_{\lambda,\nu}$ удовлетворял условию

$$Q_{\lambda,\nu}Q_{-\lambda-2,\nu} = \mathrm{id}.$$

А именно,

$$(Q_{\lambda,\nu}f)(x) = c(\lambda,\nu)\int_{\mathcal{X}} \left[\frac{(1-\xi_1\eta_2)(1-\xi_2\eta_1)}{(1-\xi_1\eta_1)(1-\xi_2\eta_2)}\right]^{\lambda,\nu} f(y)\,dy, \qquad (5.11)$$

где x и y имеют координаты ξ_1,η_1 и ξ_2,η_2 как в (5.9) и

$$c(\lambda,\nu)^{-1} = 2\omega(\lambda/2,\nu),$$

см. (5.4), (5.8), (5.9). Ядро в (5.11) (с множителем $c(\lambda,\nu)$) есть не что иное как ядро Березина. Поэтому оператор $Q_{\lambda,\nu}$ есть преобразование Березина. Оно переводит контравариантный символ в ковариантный. Чтобы записать преобразование Березина, используя *одну* систему координат, нужно изменить оператор (5.7): вместо $[x,y]$ записать $[x,yJ]$.

Литература

1. В. Ф. Молчанов. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Матем. сборник, 1970, том 81, No. 3, 358–375.

2. V. F. Molchanov. Quantization on para-Hermitian symmetric spaces. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 1996, vol. 175 (Adv. in Math. Sci.–31), 81–95.

3. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Polynomial quantization on rank one para-Hermitian symmetric spaces. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 215–222.

4. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces. Вестник Тамбовского университета, 2005, том 10, вып. 4, 412–424.