Следовательно, при $\sigma \to -\infty$ преобразование Березина имеет асимптотику:

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{\sigma}(\Delta + \overline{\Delta}).$$

Отсюда следует выполнение принципа соответствия.

Теорема 1.2 *Справедливо следующее разложение преобразования Березина:*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \;=\; & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta(\Delta - 1\cdot 2)(\Delta - 2\cdot 3)\ldots(\Delta - (k-1)k)}{k!} \cdot \frac{1}{(-\sigma - m - 2)^{(k)}} \times \\ \times \; & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{\Delta}(\overline{\Delta} - 1\cdot 2)(\overline{\Delta} - 2\cdot 3)\ldots(\overline{\Delta} - (n-1)n)}{n!} \cdot \frac{1}{(-\sigma + m - 2)^{(n)}}, \end{aligned}$$

где используется обозначение $a^{(m)} = a(a-1)\ldots(a-m+1)$.

Таким образом, в отличие от вещественного случая, для комплексного гиперболоида мы имеем счетное число полиномиальных квантований, они нумеруются целым числом n.

Литература

1. V. F. Molchanov, N. B. Volotova. Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского унив. Сер.: Естеств. и техн. науки, 1998, том 3, вып. 1, 65–78.

УДК 517.98

Об умножении обобщенных функций комплексного переменного [1]

© **Л. И. Грошева**

Ключевые слова: обобщенные функции комплексного переменного, однородные функции

Определяется умножение однородных обобщенных функций комплексного переменного

A multiplication for homogeneous distributions of the complex variable is defined

В предыдущей заметке [2] мы рассмотрели умножение однородных обобщенных функций *вещественного* переменного. Эта задача была подсказана работой

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

[3]. В настоящей заметке мы рассматриваем аналогичную задачу для однородных обобщенных функций *комплексного* переменного.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ мы возьмем переменные z и $\overline{z}$. Пусть λ и μ – комплексные числа, такие, что их разность $\lambda-\mu$ – целое число. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$.

Известно [1], что всякая однородная обобщенная функция комплексного переменного степени однородности (λ,μ) единственна с точностью до множителя, она есть $z^\lambda\overline{z}^\mu$, если хотя бы одно из чисел λ и μ не входит в множество $-\mathbb{N}-1=\{-1,-2,\ldots\}$, и есть

$$\delta^{(k,l)}(z,\overline{z})=\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k\,\partial\overline{z}^l}\;\delta(z,\overline{z}),$$

если $\lambda=-k-1$, $\mu=-l-1$; функция $\delta(z,\overline{z})$ – обобщенная функция на $\mathbb{C}$, сопоставляющая финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(z,\overline{z})$ ее значение $\varphi(0,0)$ в нуле.

Мы возьмем следующую совокупность однородных обобщенных функций: $\delta^{(k,l)}(z,\overline{z})$, где $k,l\in\mathbb{N}$, и $z^r\overline{z}^s$, где r,s – целые числа, причем хотя бы одно из них не входит в $-\mathbb{N}-1$. Они появляются как старшие лорановские (или тейлоровские) коэффициенты обобщенных функций $z^\lambda\overline{z}^\mu$ в разложении в ряд по степеням $\lambda+\mu-m$ при целых m.

Как и в [2], мы используем метод аналитического продолжения по параметрам. Наше определение произведения $f\circ g$ обобщенных функций f и g состоит в следующем: мы пишем естественную формулу для обычных функций:

$$z^\lambda\overline{z}^\mu\cdot z^{\lambda+p}\overline{z}^{\mu+q}=z^{2\lambda+p}\overline{z}^{2\mu+q}, \tag{1}$$

где $p,q\in\mathbb{Z}$, затем рассматриваем ее как формулу для обобщенных функций, понимая их как аналитические продолжения по λ, μ из полуплоскости $\mathrm{Re}\,(\lambda+\mu)>-c$, где c – некоторое число (зависящее от p,q), далее разлагаем все функции из (1) в ряд Лорана (Тейлора) по степеням $\lambda+\mu-m$, $m\in\mathbb{Z}$, тогда формула (1) и даст нам произведение старших коэффициентов. Конечно, такое определение не является единственно возможным, оно зависит от способа введения параметров λ, μ в показатели в левой части (1).

Мы получаем следующие формулы:

$$\delta^{(k,l)}(z,\overline{z})\circ\delta^{(a,b)}(z,\overline{z})=0,$$

$$z^r\overline{z}^s\circ\delta^{(a,b)}(z,\overline{z})=\frac{1}{2}(-1)^{r+s}\frac{a!b!}{(a-r)!(b-s)!}\delta^{(a-r,b-s)}(z,\overline{z}), \tag{2}$$

$$z^r\overline{z}^s\circ z^u\overline{z}^v=z^{r+u}\overline{z}^{s+v}, \tag{3}$$

где $k,l,a,b\in\mathbb{N}$, $r,s,u,v\in\mathbb{Z}$. Формула (3) имеет место для всех $r,s,u,v\in\mathbb{Z}$, кроме случая $r+u\leqslant-1$, $s+v\leqslant-1$, в этом случае исходная формула (1) для обобщенных функций теряет смысл: левая часть регулярна, а правая часть имеет полюс.

Заметим, что при $r,s\in\mathbb{N}$ формула (2) отличается от обычного умножения обобщенной функции на многочлен множителем $1/2$.

Литература

1. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.

2. Л. И. Грошева. Об умножении обобщенных функций. Вестник Тамбовского унив. Сер.: Естеств. и техн. науки, 2008, том 13, вып. 1, 10–11.

3. X. Ding, Xh. Wang. Multiplication of weak functions. Acta Math. Sci. Ser. B, 2005, vol. 25, No. 3, 569–576.

УДК 519.1

Функция Мебиуса на корневых деревьях

© **М. С. Ильина**

Ключевые слова: частично упорядоченные множества, дзета-функция, функция Мебиуса

Вычисляется функция Мебиуса на корневых деревьях

The Möbius function for root trees is written explicitly

Мы используем понятия из [1]. Пусть P – конечное частично упорядоченное множество с отношением порядка $\geqslant$. Дзета-функция $\zeta(x,y)$ двух переменных, заданная на P, определяется следующим образом: $\zeta(x,y)=1$ при $x\geqslant y$, $\zeta(x,y)=0$ в остальных случаях. Функцией Мёбиуса $\mu(x,y)$ называется функция, обратная к дзета-функции. Множество P можно изобразить в виде ориентированного графа, его вершины– это точки $x\in P$.

Предположим, что P – корневое дерево. Тогда в P существует единственный максимальный элемент x_0 и для каждого $x\neq x_0$ существует единственный элемент $x'\geqslant x$, $x'\neq x$, ближайший к x. Мы утверждаем, что в нашем случае функция Мёбиуса есть

$$\mu(x,y)=\begin{cases} 1, \ y=x, \\ -1, \ y=x', \\ 0, \ \text{otherwise}. \end{cases}$$

В самом деле, пусть $f(x,y)$ – произведение функций Мёбиуса и дзета-функции:

$$f(x,y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu(x,z)\zeta(z,y).$$

Если $x=y$, то $x=z=y$ и потому $f(x,x)=1$. Если $x\neq y$, то $x'\leqslant y$ и поэтому

$$f(x,y)=\zeta(x,y)-\zeta(x',y)=1-1=0.$$