ГРАНИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА ПАРА-ЭРМИТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ РАНГА ОДИН [1]

А. А. Артемов

Канонические представления на эрмитовых симметрических пространствах были введены Вершиком–Гельфандом–Граевым [6] (для плоскости Лобачевского) и Березиным [1]. Они унитарны относительно некоторого инвариантного нелокального скалярного произведения (формы Березина). Молчанов ввел понятие так называемых граничных представлений, тесно связанных с каноническими. Ему также принадлежит идея о том, что естественно рассматривать канонические представления в более широком смысле: надо отказаться от условия унитарности и позволить этим представлениям действовать на достаточно обширных пространствах, в частности, в обобщенных функциях. Более того, понятие канонического представления (в этом широком смысле) может быть обобщено на другие классы полупростых симметрических пространств G/H, в частности, на пара-эрмитовы симметрические пространства, см. [4]. Более того, иногда естественно рассматривать несколько пространств G/H_i одновременно, возможно с различными H_i, вложенными как открытые G-орбиты в компактное многообразие Ω, где G действует, так что Ω есть замыкание объединения этих орбит.

Канонические представления могут быть сконструированы следующим образом. Пусть $\widetilde{G}$ есть группа, содержащая G (надгруппа), $\widetilde{R}$ – серия представлений группы $\widetilde{G}$, индуцированных характерами некоторой параболической подгруппы $\widetilde{P}$ относительно G/H и действующих в функциях на Ω. Канонические представления R группы G есть ограничения представлений $\widetilde{R}$ на G.

Пара-эрмитовы симметрические пространства ранга один исчерпываются с точностью до накрытия пространствами G/H с $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $H = \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$. Для этих пространств G/H надгруппа есть прямое произведение $G\times G$, а канонические представления оказываются тензорными произведениями представлений максимально вырожденных серий и контраградиентных им представлений. Эти тензорные произведения изучаются в [3], см. также [2]. Канонические представления на G/H порождают *граничные* представления группы G, связанные с границей пространства G/H. В настоящей работе мы изучаем разложение этих граничных представлений на неприводимые составляющие (разложению канонических представлений будут посвящены следующие работы).

Канонические и граничные представления для нашего пространства G/H в случае $n = 2$ (тогда G/H является однополостным гиперболоидом в $\mathbb{R}^3$) были изучены в [5].

[1]Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ 05-01-00074а и 06-06-96318 р_центр_а), Научной программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект РНП.2.1.1.351) и Темплана 1.2.02.

Введем некоторые обозначения и соглашения. Через $\mathbb{N}$ мы обозначаем множество $\{0,1,2,\ldots\}$. Знак $\equiv$ обозначает сравнение по модулю 2.

Для характера группы $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ будем использовать следующее обозначение

$$t^{\lambda,\varepsilon} = |t|^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\varepsilon}\, t,$$

где $t \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0,\ 1$.

Для многообразия M через $\mathcal{D}(M)$ обозначается пространство Шварца бесконечно дифференцируемых $\mathbb{C}$-значных функций на M с компактным носителем, с обычной топологией, и через $\mathcal{D}'(M)$ – пространство обобщенных функций на M – антилинейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.

§ 1. Пространство G/H и многообразие Ω

Мы рассматриваем симметрическое пространство G/H, где $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $H = \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R})$, $n \geqslant 3$. Группа G действует на пространстве $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ следующим образом

$$x \mapsto g^{-1}xg.$$

Запишем матрицы из $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ в блочном виде в соответствии с разбиением $n = (n-1)+1$. Возьмем матрицу

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подгруппа H является как раз стабилизатором точки x^0, эта подгруппа состоит из блочно диагональных матриц:

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{R}), \quad \delta = (\det\alpha)^{-1}.$$

Таким образом, наше пространство G/H является G-орбитой точки x^0, оно состоит из матриц ранга один со следом, равным единице.

Снабдим $\mathbb{R}^n$ стандартным скалярным произведением $\langle x,y\rangle$, положим $|x| = \langle x,x\rangle^{1/2}$. Пусть S есть сфера $|s| = 1$. Пусть ds – евклидова мера на S. Группа G действует на S так: $s \mapsto sg/|sg|$.

Пусть $\mathcal{C}$ есть конус в $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, состоящий из матриц $x \neq 0$ ранга один. Следовательно, пространство G/H является сечением конуса $\mathcal{C}$ гиперплоскостью $\mathrm{tr}\, x = 1$. Введем норму $\|x\|$ в $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ следующим образом (штрих означает матричную транспозицию):

$$\|x\| = \{\mathrm{tr}(xx')\}^{1/2}.$$

Пусть Ω есть пересечение конуса $\mathcal{C}$ с множеством $\|x\| = 1$. Многообразие $S \times S$ накрывает дважды многообразие Ω с помощью отображения

$$(s,t) \mapsto t's = u.$$

Мера ds определяет меру du на Ω так:

$$\int_\Omega f(u)du = \frac{1}{2}\int_{S\times S} f(t's)\,ds\,dt,\ \ u = t's.$$

Действие группы G на S задает следующее действие группы G на Ω:

$$u \mapsto \frac{g^{-1}ug}{\|g^{-1}ug\|}.$$

В частности, подгруппа $K = \mathrm{SO}(n)$ – максимальная компактная подгруппа – действует на Ω сдвигами: $u \mapsto k^{-1}uk$.

Рассмотрим на Ω функцию

$$p = p(u) = \langle s, t\rangle,\quad u = t's. \tag{1.1}$$

Действие группы G на Ω имеет три орбиты: а именно, две открытые орбиты $\Omega^+ = \{p > 0\}$ и $\Omega^- = \{p < 0\}$ размерности $2n-2$ и одну орбиту $\Gamma = \{p = 0\}$ размерности $2n-3$. Орбита Γ есть многообразие Штифеля, она является границей орбит $\Omega^\pm$. Обозначим $\Omega' = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Каждая из орбит $\Omega^\pm$ может быть отождествлена с пространством G/H. Отображение строится посредством образующих конуса $\mathcal{C}$.

§ 2. Канонические и граничные представления

Сначала напомним [2] некоторый материал о серии представлений $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G, связанной с пространством G/H.

Обозначим $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$ пространство функций φ в $\mathcal{D}(\Gamma)$ четности $\varepsilon = 0, 1$:

$$\varphi(-\gamma) = (-1)^\varepsilon \varphi(\gamma).$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ действует на $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$ так:

$$T_{\sigma,\varepsilon}(g)\varphi(\gamma) = \varphi\Big(\frac{g^{-1}\gamma g}{\|g^{-1}\gamma g\|}\Big)\|g^{-1}\gamma g\|^\sigma. \tag{2.1}$$

Пусть $\langle\psi,\varphi\rangle_\Gamma$ обозначает следующую полуторалинейную форму

$$\langle\psi,\varphi\rangle_\Gamma = \int_\Gamma \psi(\gamma)\overline{\varphi(\gamma)}d\gamma. \tag{2.2}$$

Теперь напомним [3] определение максимально вырожденных серий представлений $\pi^\pm_{\mu,\nu}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, группы G. Пусть $\mathcal{D}_\nu(S)$ есть подпространство пространства $\mathcal{D}(S)$, состоящее из функций φ четности ν: $\varphi(-s) = (-1)^\nu\varphi(s)$. Представления $\pi^\pm_{\mu,\nu}$ действуют на $\mathcal{D}_\nu(S)$ следующим образом

$$\begin{aligned}(\pi^-_{\mu,\nu}(g)\varphi)(s) &= \varphi\Big(\frac{sg}{|sg|}\Big)|sg|^\mu,\\ (\pi^+_{\mu,\nu}(g)\varphi)(s) &= \varphi\Big(\frac{sg'^{-1}}{|sg'^{-1}|}\Big)|sg'^{-1}|^\mu.\end{aligned}$$

Определим *канонические представления* $R_{\mu,\nu}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$ группы G как тензорные произведения:

$$R_{\mu,\nu} = \pi^{-}_{-\mu-n} \otimes \pi^{+}_{-\mu-n}.$$

Они могут быть реализованы на Ω: пусть $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ обозначает подпространство пространства $\mathcal{D}(\Omega)$, состоящее из функций f четности ν: $f(-u) = (-1)^\nu f(u)$, тогда представление $R_{\mu,\nu}$ действует на $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ по формуле, аналогичной (2.1):

$$R_{\mu,\nu}(g)f(u) = f\Big(\frac{g^{-1}ug}{\|g^{-1}ug\|}\Big)\|g^{-1}ug\|^{-\mu-n}.$$

Скалярное произведение

$$\langle f, h\rangle_\Omega = \int_\Omega f(u)\overline{h(u)}du \tag{2.3}$$

инвариантно относительно пары $(R_{\mu,\nu}, R_{-\overline{\mu}-n,\nu})$, т.е.

$$\langle R_{\mu,\nu}(g)f, h\rangle_\Omega = \langle f, R_{-\overline{\mu}-n,\nu}(g^{-1})h\rangle_\Omega. \tag{2.4}$$

Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ задает два представления $L_{\lambda,\nu}$ и $M_{\lambda,\nu}$, связанные с границей Γ многообразий $\Omega^\pm$ (*граничные представления*). Первое из них действует в обобщенных функциях, сосредоточенных на Γ, второе действует на струях, ортогональных Γ.

Введем "полярные координаты" на Ω соответственно расслоению Ω на K-орбиты. Эти K-орбиты являются поверхностями уровня функции p, см. (1.1). Для $-1 < p < 1$ они диффеоморфны многообразию Γ. В полярных координатах мера du на Ω есть

$$du = (1-p^2)^{(n-3)/2}dp\,d\gamma,$$

где $d\gamma$ есть мера на Γ.

Пусть f есть функция из $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$. Рассмотрим ее как функцию от полярных координат. Рассмотрим ее ряд Тейлора $a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots$ по степеням p. Здесь $a_m = a_m(f)$ являются функциями из $\mathcal{D}(\Gamma)$. Обозначим через $\Sigma^k_\nu(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1$, пространство обобщенных функций на $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$, имеющих вид

$$\sum_{m=0}^{k} \varphi_m(\gamma)\delta^{(m)}(p),$$

где $\varphi_m \in \mathcal{D}_{\nu-m}(\Gamma)$, δ есть дельта-функция Дирака на действительной прямой, $\delta^{(m)}$ – ее производные. Пусть $\Sigma_\nu(\Omega) = \cup\Sigma^k_\nu(\Omega)$.

Обозначим через $a^*_m(f)$ коэффициенты Тейлора функции $(1-p^2)^{(n-3)/2}f(u)$. Обобщенная функция $\varphi(\gamma)\delta^{(m)}(p)$ действует на функцию $f \in \mathcal{D}_\nu(\Omega)$ следующим образом:

$$\langle\varphi\delta^{(m)}(p), f\rangle_\Omega = (-1)^m m!\langle\varphi, a^*_m(f)\rangle_\Gamma.$$

Обозначим через $L_{\mu,\nu}$ ограничение представления $R_{\mu,\nu}$ на $\Sigma_\nu(\Omega)$. Это представление записывается в виде верхней треугольной матрицы с диагональю $T_{1-n-\mu+m,\nu-m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $a(f)$ означает столбец коэффициентов Тейлора $a_m(f)$. Представление $M_{\mu,\nu}$ действует на этих столбцах:

$$M_{\mu,\nu}(g)a(f) = a(R_{\mu,\nu}(g)f).$$

Оно записывается в виде нижней треугольной матрицы с диагональю $T_{-n-\mu-m,\nu-m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Граничные представления $L_{\mu,\nu}$ и $M_{\mu,\nu}$ дуальны друг другу.

§ 3. Преобразования Пуассона и Фурье

Выпишем операторы $P_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}$ и $F_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}$, сплетающие представления $R_{\mu,\nu}$ и $T_{\sigma,\varepsilon}$. Назовем их *преобразованиями Пуассона и Фурье, связанными с каноническими представлениями.*

Преобразование Пуассона $P_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}$ есть отображение $\mathcal{D}(\Gamma) \longrightarrow C^\infty(\Omega')$, задаваемое формулой

$$P_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}\varphi(u) = p^{-\mu-\sigma-n,\nu-\varepsilon}\int_\Gamma \{\mathrm{tr}(u\gamma)\}^{\sigma,\varepsilon}\varphi(\gamma)d\gamma.$$

Оно сплетает $T_{1-\sigma-n,\varepsilon}$ с $R_{\mu,\nu}$. Здесь мы рассматриваем $R_{\mu,\nu}$ как ограничение на $C^\infty(\Omega')$ представления $R_{\mu,\nu}$, действующего в обобщенных функциях на $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Для K-финитной функции $\varphi \in \mathcal{D}_\nu(\Gamma)$ и $\sigma \notin (1-n)/2 + \mathbb{Z}$ преобразование Пуассона имеет следующее разложение по степеням p:

$$\begin{aligned}(P_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}\varphi)(u) &= p^{-\mu-\sigma-n,\nu-\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}(C_{\sigma,\varepsilon,k}\varphi)(\gamma)\cdot p^k \\ &+ p^{-\mu+\sigma-1,\nu-\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}(D_{\sigma,\varepsilon,k}\varphi)(\gamma)\cdot p^k,\end{aligned}$$

где u имеет полярные координаты p,γ. Здесь $C_{\sigma,\varepsilon,k}$ и $D_{\sigma,\varepsilon,k}$ – некоторые операторы, действующие в $\mathcal{D}_\nu(\Gamma)$. Множители $p^{-\mu-\sigma-n,\nu-\varepsilon}$ и $p^{-\mu+\sigma-1,\nu-\varepsilon}$ дают полюсы преобразования Пуассона по σ, зависящие от μ:

$$\sigma = \mu - k, \quad \sigma = 1 - n - \mu + l, \tag{3.1}$$

где $k, l \in \mathbb{N}$ и $k \equiv \nu - \varepsilon$, $l \equiv \nu - \varepsilon$. Если полюс принадлежит только одной серии (3.1), то полюс простой, а если полюс принадлежит обеим сериям (3.1), тогда $\mu \in (1-n)/2 + \mathbb{N}$ и полюс является полюсом второго или первого порядка.

Пусть полюс $\sigma = \mu - k$, $k \equiv \nu - \varepsilon$, – простой. Вычет $\widehat{P}_{\mu,\nu,\mu-k}$ преобразования $P_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}$ в этом полюсе есть некоторый оператор $\mathcal{D}(\Gamma) \to \Sigma^k_\nu(\Omega)$. Обозначим образ этого оператора через $V_{\mu,\nu,k}$.

Преобразование Фурье $F_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}$ есть отображение $\mathcal{D}_\nu(\Omega) \to \mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$, задаваемое формулой

$$F_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}f(\gamma) = \int_\Omega \{\mathrm{tr}(u\gamma)\}^{\sigma,\varepsilon}p^{\mu-\sigma,\nu-\varepsilon}f(u)du.$$

Оно сплетает представления $R_{\mu,\nu}$ и $T_{\sigma,\varepsilon}$.

Преобразования Фурье и Пуассона являются сопряженными друг другу:

$$\langle F_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon} f, \varphi \rangle_\Gamma = \langle f, P_{-\overline{\mu}-n,\nu;\overline{\sigma},\varepsilon}\varphi \rangle_\Omega.$$

Полюсы преобразования Фурье как функции от σ расположены в точках

$$\sigma = -n - \mu - k, \quad \sigma = \mu + 1 + l, \tag{3.2}$$

где $k, l \in \mathbb{N}$ и $k \equiv \nu - \varepsilon$, $l \equiv \nu - \varepsilon$. Если полюс принадлежит только одной из серий (3.2), то такой полюс простой, а если полюс принадлежит обеим сериям (3.2), тогда $\mu \in (-1 - n)/2 - \mathbb{N}$ и полюс является полюсом второго или первого порядка..

Пусть полюс $\sigma = -n - \mu - k$, $k \equiv \nu - \varepsilon$, – простой. Вычет $\widehat{F}_{\mu,\nu,-n-\mu-k}$ преобразования $F_{\mu,\nu;\sigma,\varepsilon}$ в этом полюсе является "граничным" оператором $B_{\mu,\nu,k}$: $\mathcal{D}_\nu(\Omega) \to \mathcal{D}(\Gamma)$, $k \equiv \nu$. Оператор $B_{\mu,\nu,k}$ задается в терминах коэффициентов Тейлора $a_m(f)$: он есть линейная комбинация функций $D_{-\mu-n-k,\nu,k-m}\big(a_m^*(f)\big)$. Кроме того, можно рассмотреть следующий оператор $B_{\mu,\nu}$. действующий на столбцах $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ функций $a_k \in \mathcal{D}_\nu(\Gamma)$: этот оператор каждому столбцу a ставит в соответствие столбцы $B_{\mu,\nu}a = (B_{\mu,\nu,0}a, B_{\mu,\nu,1}a, B_{\mu,\nu,2}a, \ldots)$ функций в том же пространстве $\mathcal{D}_\nu(\Gamma)$ – по тем же формулам без f. Этот оператор $B_{\mu,\nu}$ задается нижней треугольной матрицей.

§ 4. Разложение граничных представлений

Мероморфная структура преобразований Пуассона и Фурье является основой для разложения граничных представлений $L_{\mu,\nu}$ и $M_{\mu,\nu}$.

Пусть полюс $\sigma = \mu - k$ преобразования Пуассона – простой, в частности, это бывает, когда $\mu \notin (1 - n)/2 + \mathbb{N}$. Тогда граничное представление $L_{\mu,\nu}$ диагонализуемо. Это означает, что $\Sigma_\nu(\Omega)$ разлагается в прямую сумму подпространств $V_{\mu,\nu,k}$, $k \in \mathbb{N}$, и ограничение представления $L_{\mu,\nu}$ на $V_{\mu,\nu,k}$ эквивалентно представлению $T_{1-n-\mu+k,\varepsilon+k}$ (посредством $\widehat{P}_{\mu,\nu,\mu-k}$).

Если полюс – второго порядка, тогда разложение представления $L_{\mu,\nu}$ содержит конечное число жордановых клеток, их количество зависит от μ.

Пусть полюс $\sigma = -n - \mu - k$ преобразования Фурье – простой, это бывает, в частности, когда $\mu \notin (-1-n)/2-\mathbb{N}$. Тогда матрица $M_{\mu,\nu}$ диагонализуема, что означает, что $B_{\mu,\nu}^{-1} M_{\mu,\nu} B_{\mu,\nu}$ является диагональной матрицей. Ее диагональю является $T_{-n-\mu-k,\nu-k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Если полюс – второго порядка, тогда разложение представления $M_{\mu,\nu}$ содержит конечное количество жордановых клеток, их число зависит от μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. А. Березин.* Квантование на комплексных симметрических пространствах. Изв. Акад. наук СССР, Сер. матем., 1975, том 39, No. 2, 363–402.

2. *G. van Dijk, V. F. Molchanov.* The Berezin form for rank one para-Hermitian symmetric spaces. J. Math. Pures Appl., 1998, tome 77, No. 8, 747–799.

3. *G. van Dijk, V. F. Molchanov.* Tensor products of maximal degenerate series representations of the group $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. J. Math. Pures Appl., 1999, tome 78, No. 1, 99–119.

4. *V. F. Molchanov.* Quantization on para-Hermitian symmetric spaces. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 1996, vol. 175 (Adv. in Math. Sci.–31), 81–95.

5. *V. F. Molchanov.* Canonical and boundary representations on a hyperboloid of one sheet. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 191–214.

6. *А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев.* Представления группы $SL(2,R)$, где R – кольцо функций. Успехи матем. наук, 1973, том 28, No. 5, 83–128.