ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ГРУППЫ НА ДВУМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ [1]

Н. А. Малашонок

Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра размерности 2 над полем $\mathbb{R}$. Она состоит из "чисел" $x+iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = \alpha+2\beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. В настоящей работе мы находим автоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$, ортогональные группы, действующие в $\mathcal{A}$, и решаем одну механическую задачу – находим центроиды движения твердого тела.

§ 1. Автоморфизмы

Обозначим $\omega = \alpha + \beta^2$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется алгеброй эллиптического, параболического, гиперболического типа, если $\omega > 0$, $\omega = 0$, $\omega < 0$, соответственно. Алгебры этих типов изоморфны, соответственно, полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел ($i^2 = -1$), алгебре Λ дуальных чисел ($i^2 = 0$), алгебре $\mathbb{D}$ двойных чисел ($i^2 = 0$). Однако мы не будем пользоваться этими изоморфизмами.

Алгебра $\mathcal{A}$ отождествляется с плоскостью $\mathbb{R}^2$ естественным образом: числу $z = x + iy$ сопоставляется вектор (столбец) с координатами x, y. Умножение на число $w = u + iv$ есть линейное преобразование M_w с матрицей

$$M_w = \begin{pmatrix} u & \alpha v \\ v & u+2\beta v \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Назовем число $\overline{z} = x + 2\beta y - iy$ *сопряженным* числу $z = x + iy$. Отображение $\sigma : z \mapsto \overline{z}$ является автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$, причем инволютивным автоморфизмом (квадрат равен тождественному отображению). Его матрица есть

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2\beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$.

Теорема 1.1 *Для алгебр $\mathcal{A}$ эллиптического и гиперболического типа (т.е. $\omega \neq 0$) группа автоморфизмов есть группа второго порядка: $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}_2$, она состоит из двух элементов: тождественного автоморфизма и сопряжения σ; для алгебр $\mathcal{A}$ параболического типа (т.е. $\omega = 0$) группа автоморфизмов изоморфна группе вещественных чисел без нуля по умножению: $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^*$, числу $\eta \in \mathbb{R}^*$ отвечает автоморфизм φ_η: $z \mapsto x + \beta(1-\eta)y + i\eta y$, где $z = x + iy$. При $\eta = -1$ этот автоморфизм есть сопряжение σ. Матрица автоморфизма φ_η есть*

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta(1-\eta) \\ 0 & \eta \end{pmatrix}.$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 05-01-00074а, Научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.2.02.

Доказательство. Автоморфизм φ определяется числом $\varphi(i) = \xi + i\eta$, причем $\eta \neq 0$. Это число должно удовлетворять условию $\varphi(i^2) = (\varphi(i))^2$. Последнее условие дает систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta\xi &= \xi^2 + \alpha\eta^2, \\ \beta\eta &= \xi\eta + \beta\eta^2. \end{cases}$$

Поскольку $\eta \neq 0$, последнее уравнение дает: $\xi = \beta(1-\eta)$. Подставляя это в первое уравнение, получаем $\omega\eta^2 = \omega$. Если $\omega \neq 0$, то $\eta = 1$ или $\eta = -1$. Тогда $\xi = 0$ или $\xi = 2\beta$, соответственно. Если же $\omega = 0$, то $\eta \neq 0$ произвольно, а $\xi = \beta(1-\eta)$. $\square$

Мы видим,что во всех случаях группа $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ коммутативна.

§ 2. Ортогональные группы

Для $z = x + iy$ число $z\overline{z}$ вещественно: $z\overline{z} = x^2 + 2\beta xy - \alpha y^2$. Поляризация этой квадратичной формы дает билинейную форму

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) = x_1x_2 + \beta x_1y_2 + \beta y_1x_2 - \alpha y_1y_2.$$

Назовем $\langle z_1, z_2 \rangle$ скалярным произведением векторов z_1 и z_2. Заметим, что

$$\langle z, z \rangle = z\bar{z} = \det M_z.$$

Матрица формы $\langle z_1, z_2 \rangle$ есть

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix},$$

ее определитель равен $-\omega$.

Линейное невырожденное преобразование g алгебры $\mathcal{A}$ назовем *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение: $\langle g(z_1), g(z_2) \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle$. Множество всех ортогональных преобразований образует группу, обозначим ее $\mathrm{O}(\mathcal{A})$.

Умножения M_w на числа w такие, что $w\overline{w} = 1$, и автоморфизмы φ входят в группу $O(\mathcal{A})$. В самом деле,

$$\langle wz_1, wz_2 \rangle = \frac{1}{2}(wz_1\overline{wz}_2 + \overline{wz}_1 wz_2) = \frac{1}{2}(z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) = \langle z_1, z_2 \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(z_1), \varphi(z_2) \rangle &= (1/2)(\varphi(z_1)\overline{\varphi(z_2)} + \overline{\varphi(z_1)}\varphi(z_2)) = \\ &= (1/2)(\varphi(z_1)\varphi(\overline{z}_2) + \varphi(\overline{z}_1)\varphi(z_2)) = \\ &= \varphi(\langle z_1, z_2 \rangle) = \\ &= \langle z_1, z_2 \rangle. \end{aligned}$$

Для φ мы использовали коммутативность группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.

Композиции таких умножений и автоморфизмов тоже входят в $\mathrm{O}(\mathcal{A})$. Верно и обратное, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1 *Всякое ортогональное преобразование g есть композиция автоморфизма φ и умножения на число w такое, что $w\overline{w} = 1$:*

$$g = M_w \circ \varphi.$$

Доказательство. Пусть преобразование $g \in \mathrm{O}(\mathcal{A})$ имеет матрицу

$$g = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}.$$

Эта матрица должна удовлетворять условию

$$g'Qg = Q, \tag{2.1}$$

где штрих означает транспонирование.

Пусть $\omega \neq 0$. Тогда (2.1) дает, что $\det g = \pm 1$. Условие (2.1) можно переписать как $Qg = g'^{-1}Q$. Для $\det g = 1$ и $\det g = -1$ это дает, соответственно,

$$g = \begin{pmatrix} p & \alpha q \\ q & p + 2\beta q \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} p & 2\beta p - \alpha q \\ q & -p \end{pmatrix}.$$

Первая матрица есть матрица умножения на $w = p + iq$, см. (1.1), вторая – есть произведение первой матрицы и матрицы сопряжения σ, см. (1.2).

Пусть теперь $\omega = 0$. Тогда матрица Q имеет ранг 1, она есть

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение (2.1) сводится к уравнениям

$$(p + q\beta)^2 = 1, \quad (p + q\beta)(r + \beta s) = \beta, \quad (r + \beta s)^2 = \beta^2.$$

Отсюда получаем либо $p+\beta q = 1$, $(r+\beta s) = \beta$, либо $p+\beta q = -1$, $(r+\beta s) = -\beta$. Матрица g есть, соответственно,

$$\begin{pmatrix} 1 - \beta q & \beta(1 - s) \\ q & s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 - \beta q & -\beta(1 + s) \\ q & s \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Матрицы (2.2) распадаются в произведения $M_w \varphi_\eta$, где, соответственно, $w = 1 - \beta q + iq$, $\eta = s - \beta q$ и $w = -1 - \beta q + iq$, $\eta = -s + \beta q$. □

Обозначим через $\mathrm{SO}(\mathcal{A})$ подгруппу группы $\mathrm{O}(\mathcal{A})$, состоящую из преобразований с определителем 1. Из теоремы 2.1 следует, что группа $\mathrm{SO}(\mathcal{A})$ состоит из умножений M_w, где $w\overline{w} = 1$. Геометрически ее можно отождествить с кривой второго порядка на плоскости $\mathcal{A}$, состоящей из чисел w таких, что $w\overline{w} = 1$, т.е. с кривой $u^2 + 2\beta uv - \alpha v^2 = 1$. Это – эллипс для алгебр $\mathcal{A}$ эллиптического типа, гипербола для алгебр гиперболического типа и пара прямых для алгебр параболического типа.

§ 3. Центроиды твердого тела

Назовем *движением* в алгебре $\mathcal{A}$ преобразование $z \mapsto wz + a$, где $w, a \in \mathcal{A}$, $w\overline{w} = 1$. Назовем твердым телом совокупность точек, расстояние между которыми не меняется при движениях.

Рассмотрим семейство движений $z \mapsto w(t)z + a(t)$, зависящих от параметра t (время). Функции $w(t)$ и $a(t)$ – достаточно хорошие, например, приналежат классу C^2. Начальные условия: $w(0) = 1$, $a(0) = 0$.

Точка твердого тела, занимающая в начальный момент $t = 0$ положение $\zeta \in \mathcal{A}$, описывает траекторию $z(t) = w(t)\zeta + a(t)$. Скорость точки есть $\dot{z} = \dot{w}\zeta + \dot{a}$ (производная по времени обозначается точкой сверху). Центроида твердого тела – это множество точек, в которых скорость равна нулю: $\dot{w}\zeta + \dot{a} = 0$. Следовательно, $\zeta = -\dot{a}/\dot{w}$, так что центроида есть кривая $z = w(-\dot{a}/\dot{w}) + a$, или

$$z = \frac{\dot{w}a - w\dot{a}}{\dot{w}}. \tag{3.1}$$

Подвижная центроида (в теле) есть кривая

$$\zeta = -\frac{\dot{a}}{\dot{w}}. \tag{3.2}$$

Касательные векторы к центроидам (3.1) и (3.2) таковы:

$$\dot{z} = w\frac{\ddot{w}\dot{a} - \dot{w}\ddot{a}}{\dot{w}^2}, \quad \dot{\zeta} = \frac{\ddot{w}\dot{a} - \dot{w}\ddot{a}}{\dot{w}^2},$$

так что $\dot{z} = w\dot{\zeta}$. Это говорит о том, что касательные векторы к неподвижной и подвижной центроидам в точке касания совпадают, так что подвижная центроида катится по неподвижной.