Пусть $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$. Рассмотрим отображение $\Delta_\eta : [a,b]\times C^n[a,b]\times[0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, заданное равенством

$$\Delta_\eta(t,x,\delta) = (\Delta(t,x))^{\eta(t,\delta)}.$$

Пусть, далее, отображение $\Phi_\eta : C^n[a,b]\times[0,\infty) \to \Pi[L^n[a,b]]$ определено равенством

$$\Phi_\eta(x,\delta) = \{y \in L^n[a,b] : \ y(t) \in \Delta_\eta(t,x,\delta) \quad \text{при почти всех} \quad t \in [a,b]\}.$$

Пусть $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b]\times[0,\infty))$. Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta > 0$ задачу

$$\mathcal{L}x \in \Phi_\eta(x,\delta), \quad lx \in \varphi(x)^{\xi(x,\delta)}. \tag{4}$$

Пусть $U \subset C^n[a,b]$. Обозначим через $H(U)$, $H_{\rm co}(U)$, $H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)$ множества решений включений (2), (3), (4), принадлежащие множеству U.

О п р е д е л е н и е. *Будем говорить, что для задачи (2) на множестве $U \subset C^n[a,b]$ выполняется принцип плотности (условие плотности), если справедливо равенство $\overline{H}(U) = H_{\rm co}(U)$, где $\overline{H}(U)$ – замыкание в пространстве $C^n[a,b]$ множества $H(U)$.*

Т е о р е м а 1. *Пусть U – непустое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$. Тогда для любой функции $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b]\times[0,\infty))$ найдется функция $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$, для которой справедливо равенство*

$$H_{\rm co}(U) = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)},$$

где $\overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a,b]$ множества $H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\xi(\cdot,\cdot) \in P(C^n[a,b]\times[0,\infty))$. Если U – непустое замкнутое множество пространства $C^n[a,b]$, то для выполнения равенства*

$$\overline{H(U)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta),\xi(\delta)}(U)}$$

для любой функции $\eta(\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[0,\infty))$ достаточно, а если U – непустое выпуклое компактное множество пространства $C^n[a,b]$, то и необходимо, выполнение принципа плотности на множестве $U \subset C^n[a,b]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григоренко А.А.* Возмущенные включения и функционально-дифференциальные включения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 2003. 16 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 04-01-00324, Министерства образования и науки РФ, грант № Е02-1.0-212, НИР темплана 01.002.2.

ОБ УСЛОВИЯХ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

© Е.С. Жуковский

Математическое описание ряда явлений в физике, технике, экономике, биологии, медицине и т.д., учитывающее инерцию объектов, конечность скоростей распространения сигналов, факторы запаздывания, приводит к уравнениям с вольтерровыми операторами в некотором функциональном пространстве. Требование корректности модели обычно означает, что соответствующее уравнение имеет единственное решение, которое устойчиво к малым изменениям параметров модели, начальных условий, входных сигналов и т.д. Как правило, при доказательстве таких утверждений предполагается, что либо операторы являются близкими к сжимающим, либо, что операторы являются τ-вольтерровыми. На первый взгляд, сжатие и τ-вольтерровость отражают совершенно разные не связанные друг с другом геометрические свойства операторов. Тем не менее оказывается, что сжатие и τ-вольтерровость являются частными проявлениями одного важного свойства вольтерровых операторов, которое мы назвали "локальной сжимаемостью".

Поставим в соответствие каждому $\gamma \in [0,\,1]$ некоторое множество $e_\gamma \subset [a,\,b]$ таким образом, что

$$\gamma = 1 \mapsto e_1 = [a,b], \qquad \forall\,\gamma,\eta \in [0,\,1] \qquad \gamma < \eta \quad \Rightarrow \quad e_\gamma \subset e_\eta.$$

Обозначим совокупность построенных так множеств через v. Пусть (B,ρ_B) - полное метрическое пространство функций $f:[a,\,b] \to R^m$. Отображение $F:B \to B$ будем называть *вольтерровым на системе* v, если для каждого множества $e_\gamma \in v$ и любых функций $y,z \in B$ из $y(s)=z(s)$ на e_γ следует $(F\,y)(s)=(F\,z)(s)$ на e_γ. Отображение $F:B \to B$ будем называть *τ-вольтерровым на системе* v, если для каждого множества $e_\gamma \in v$, $\gamma \in [0,\,1-\tau]$ и любых функций $y,z \in B$ из $y(s)=z(s)$ на e_γ следует $(F\,y)(s)=(F\,z)(s)$ на $e_{\gamma+\tau}$. Эти определения совпадают с классическими определениями вольтерровости и τ-вольтерровости по А.Н. Тихонову [1], если положить $e_\gamma=[a,\,a+\gamma(b-a)]$. Изучению свойств вольтерровых и обобщенно вольтерровых операторов посвящена обширная литература (основные направления исследований, результаты, библиографию см. [2-10]).

Будем предполагать, что в пространстве B выполнено *V-условие*: $\forall\,e_\gamma \in v\ \ \forall\,\{y_i\} \subset B\ \ \forall\,y,z \in B$

$$\left.\begin{array}{l}\rho_B(y_i,\,y) \to 0,\\ y_i(t)=z(t), \quad i=1,\,2,\ldots,\ \forall\,t \in e_\gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \ y(t)=z(t), \ \ \forall\,t \in e_\gamma.$$

Обозначим $B(e_\gamma)$ – пространство сужений функций из B на множество e_γ. Метрику в пространстве $B(e_\gamma)$ зададим формулой $\rho_{B(e_\gamma)}(y_\gamma,z_\gamma)=\inf \rho_B(y,\,z)$, где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $y,\,z \in B$ функций $y_\gamma,\,z_\gamma \in B(e_\gamma)$. Если выполнено V-условие, то, при таком определении метрики, пространство $B(e_\gamma)$ будет полным. Определим оператор $\Pi_\gamma : B \to B(e_\gamma)$, $(\Pi_\gamma\,y)(t)=y(t)$, $t \in e_\gamma$. Пусть оператор $P_\gamma : B(e_\gamma) \to B$ некоторым образом продолжает каждую функцию y_γ на весь $[a,\,b]$.

Рассмотрим уравнение

$$x(t)=(Kx)(t), \quad t \in [a,\,b], \tag{1}$$

с вольтерровым на системе v оператором $K:B \to B$. Если существует число $\gamma \in (0,\,1)$ и элемент $z_\gamma \in B(e_\gamma)$, удовлетворяющий равенству $z_\gamma=\Pi_\gamma K P_\gamma z_\gamma$, то уравнение (1) будем называть *локально разрешимым*, а функцию z_γ – *локальным решением, определенным на* e_γ. Элемент $z_1 \in B$, удовлетворяющий уравнению (1), назовем *глобальным решением*. Вследствие вольтерровости оператора K сужение z_γ решения z_ζ (локального или глобального) на произвольное множество e_γ, $\gamma \in (0,\,\zeta)$, будет локальным решением уравнения (1). Будем называть решение z_γ *частью решения* z_ζ, а решение z_ζ – *продолжением решения* z_γ.

Оператор $K:B \to B$ называем *локально сжимающим на системе* v, если существуют такие $q<1$, $\tau>0$, что выполнены условия:
1. $\forall\,\gamma \in (0,\,\tau) \quad \forall\,x,\,y \in B \qquad \rho_{B(e_\gamma)}(\Pi_\gamma Kx,\,\Pi_\gamma Ky) \leqslant q \cdot \rho_{B(e_\gamma)}(\Pi_\gamma x,\,\Pi_\gamma y)$,
2. $\forall\,\xi,\gamma \in (0,\,1] \quad \xi<\gamma<\xi+\tau \qquad \forall\,x,\,y \in B$

$$\{\,x(t)=y(t), \ \ \forall\,t \in e_\xi \quad \Rightarrow \quad \rho_{B(e_\gamma)}(\Pi_\gamma Kx,\,\Pi_\gamma Ky) \leqslant q \cdot \rho_{B(e_\gamma)}(\Pi_\gamma x,\,\Pi_\gamma y).$$

Класс локально сжимающих на системе v операторов достаточно широк. Таким свойством, конечно, обладают сжимающие операторы. При $q=0$ определение локальной сжимаемости равносильно определению τ-вольтерровости. Отметим, что свойством локальной сжимаемости могут обладать даже разрывные в каждой точке и неограниченные операторы.

Т е о р е м а 1. *Пусть в полном метрическом пространстве B выполнено V-условие; оператор $K:B \to B$ является вольтерровым и локально сжимающим на системе v. Тогда при любом $\gamma \in (0,\,1]$ существует единственное решение $x_\gamma \in B(e_\gamma)$ уравнения $x_\gamma=\Pi_\gamma\,K\,P_\gamma\,x_\gamma$. Другими* *словами, существует единственное глобальное решение уравнения* (1), *и всякое локальное решение является частью этого решения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физике // Бюл. Моск. ун-та. Секция А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25.
2. *Бродский М.С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, 1969. 364 с.
3. *Булгаков А.И.* Элементы теории краевых задач для функционально-дифференциальных включений // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Тамбов, 1993. 300 с.
4. *Бухгейм А.Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 208 с.
5. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.
6. *Жуковский Е.С.* Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2003. 148 с.
7. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 9. С. 3–18.
8. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. 168 с.
9. *Лившиц М.С.* О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Матем. сб. 1954. Т. 34(76). № 1. С. 145–198.
10. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 04-01-00324, Министерства образования и науки РФ, грант № Е02-1.0-212, НИР темплана 01.002.2.

О ГЛОБАЛЬНОЙ ПРОДОЛЖАЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ВКЛЮЧЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

© Е.С. Жуковский, М.Г. Мишина

Математические модели, описывающие динамику процессов самой разной природы, представляют собой уравнения или включения с вольтерровыми операторами. Вопросы разрешимости таких уравнений и включений рассматривались в работах Ю.И. Алимова, Н.В. Азбелева, Б.И. Ананьева, Е.А. Барбашина, В.И. Благодатских, М.С. Бродского, С.А. Брыкалова, А.И. Булгакова, А.Л. Бухгейма, Е.А. Ганго, И.Ц. Гохберга, В.Б. Колмановского, Н.Н. Красовского, М.С. Крейна, А.Б. Куржанского, М.С. Лившица, Л.Н. Ляпина, А.Д. Мышкиса, В.Р. Носова, А.И. Поволоцкого, Р.К. Рагимханова, А.И. Субботина, А.Н. Сесекина, А.А. Толстоногова, С.Т. Завалищина, А.Ф. Филиппова, И.А. Финогенко, А.Г. Ченцова, З.Б. Цалюка, J. Davy, H. Hermes, N. Kikuchi, M. Kisielewicz, A. Marchaud, A. Plis, T. Wazewski, S. Zaremba и др. Ниже исследуется разрешимость включений с многозначными отображениями, обладающими свойством обобщенной вольтерровости.

Поставим в соответствие каждому $\gamma \in [0,\,1]$ некоторое множество $e_\gamma \subset [a,\,b]$ таким образом, что

$$\gamma = 1 \mapsto e_1 = [a,b], \qquad \forall\, \gamma, \eta \in [0,\,1] \qquad \gamma < \eta \quad \Rightarrow \quad e_\gamma \subset e_\eta.$$

Обозначим совокупность построенных так множеств через v. Пусть (B, ρ_B) - полное метрическое пространство функций $f : [a,\,b] \to R^m$, $Cb(B)$ - совокупность непустых замкнутых ограниченных подмножеств B, $H_B(\Phi, \Psi)$ – расстояние по Хаусдорфу между Φ, $\Psi \in Cb(B)$. Отображение $F : B \to$ $\to Cb(B)$ будем называть *вольтерровым на системе* v, если для каждого множества $e_\gamma \in v$ и любых функций $y, z \in B$ из $y(s) = z(s)$ на e_γ следует $(Fy)(s) = (Fz)(s)$ на e_γ.

Выберем произвольно функцию $z \in B$ и множество $e_\gamma \in v$. Для любого множества $\Phi \subset B$ определим его подмножество $T^z_\gamma \Phi = \{y \in \Phi \mid y(t) = z(t),\ \forall\, t \in e_\gamma\}$. Будем предполагать, что в пространстве B выполнено V*-условие*: $\forall\, e_\gamma \in v \quad \forall\, \{y_i\} \subset B \quad \forall\, y, z \in B$

$$\left.\begin{array}{l} \rho_B(y_i, y) \to 0, \\ y_i(t) = z(t), \quad i = 1, 2, \ldots, \forall\, t \in e_\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \; y(t) = z(t), \;\; \forall\, t \in e_\gamma.$$