Т е о р е м а 3. *Для того, чтобы решение* $x : [a, c) \to \mathbb{R}^n$ *задачи* $(1)-(3)$ *было продолжаемым на* $[a, \tau]$, $(\tau \in [c, b])$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{\lim\limits_{t\to c-0}} |x(t)| < \infty$.

Т е о р е м а 4. *Если* y *– решение задачи* $(1)-(3)$ *на* $[a, \tau]$, $\tau \in (a, b]$, *то существует непродолжаемое решение* x *задачи* $(1)-(3)$, *определенное либо на* $[a, c)$ $(c \in (\tau, b])$, *либо на* $[a, b]$ *такое, что при всех* $t \in [a, \tau]$ *выполнено равенство* $x(t) = y(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Известия ВУЗов. 1999. № 3. С. 3–16.

2. *Тихонов А.Н.* Функциональные уравнения типа Вольтерра и их приложения к некоторым вопросам математической физики // Бюллетень московского университета. Секция А, 1938. Т. 68. № 4. С. 1-25.

Abstract: The problem of extendability of solutions for a functional-differential inclusion with lower semicontinuous Volterra operator (in the sense of Tikhonov) is considered.

Keywords: functional-differential inclusion; multivalued impulses, extendable solution.

Корчагина Елена Валерьевна
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

Elena Korchagina
post-graduate student
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: aib@tsu.tmb.ru

УДК 519.688

О ВЫЧИСЛЕНИИ МНОГОМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ПРОСТОМ ПОЛЕ [1]

© **А. О. Лапаев**

Ключевые слова: компьютерная алгебра; дискрентное преобразование Фурье; быстрое преобразование Фурье; теория алгоритмов.

Аннотация: Рассматривается способ вычисления дискрентного преобразования Фурье для полиномов многих переменных в кольце $Z_p[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Получены теоретические оценки сложности изложенного подхода.

Пусть $f \in \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \ldots, x_d]$, p – простое число. Пусть наибольшая степень переменной x_i в полиноме f равна $n_i - 1$, $n_i = 2^{N_i}$. Обозначим $n = n_1 n_2 \ldots n_d$. Тогда полином f можно записать в виде:

$$f = \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \ldots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} f_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_d^{i_d}$$

[1] Работа выполнена при поддержке программы "Развитие потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/1853).

Пусть простое число p такое, что каждое из чисел n_i делит $p-1$. Тогда в $\mathbb{Z}_p$ существует корень из 1 степени n_i, который будем обозначать ω_i. Введем определение дискретного преобразования Фурье полинома f.

О п р е д е л е н и е: Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) для полинома f называется d-мерная таблица чисел $\mathcal{F}(f) = (\hat{f}_{j_1 \dots j_d})$, где $1 \leqslant j_1 \leqslant n_1,\ 1 \leqslant j_2 \leqslant n_2,\ \dots 1 \leqslant j_d \leqslant n_d$, где

$$\hat{f}_{j_1 j_2 \dots j_d} = \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{i_d=0}^{n_d-1} f_{i_1 i_2 \dots i_n} \omega_1^{j_1 i_1} \omega_2^{j_2 i_2} \dots \omega_d^{j_d i_d}. \tag{1}$$

Правая часть (1) содержит n слагаемых. В левой части находится элемент d-мерной таблицы, всего таких элементов n. Следовательно, общее число операций для вычисления ДПФ полинома f будет $O(n^2)$. Рассмотрим способ быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье.

Запишем формулу (1) в виде:

$$\hat{f}_{j_1 j_2 \dots j_d} = \sum_{i_d=0}^{n_d-1} \omega_d^{j_d i_d} \sum_{i_{d-1}=0}^{n_{d-1}-1} \omega_{d-1}^{j_{d-1} i_{d-1}} \dots \sum_{i_k=0}^{n_k-1} \omega_k^{j_k i_k} \dots \sum_{i_1=0}^{n_1-1} f_{i_1 i_2 \dots i_d} \omega_1^{j_1 i_1}.$$

При фиксированных параметрах $i_2, \dots, i_d$ выражение

$$F^1_{j_1, i_2, i_3, \dots, i_d} = \sum_{i_1=0}^{n_1-1} f_{i_1 i_2 \dots i_d} \omega_d^{j_1 i_1}$$

– j_1-й элемент одномерного дискретного преобразования Фурье на n_1 точках, которое может быть посчитано по алгоритму Cooley-Tukey [1] за $O(n_1 \log_2 n_1)$ операций.

Обозначим

$$F^{k+1}_{j_1, \dots, j_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_d} = \sum_{i_{k+1}=0}^{n_{k+1}-1} F^k_{j_1, \dots, j_k, i_{k+1} \dots i_d} \omega_d^{j_{k+1} i_{k+1}}.$$

При последовательном вычислении $F_1, F_2, \dots, F_d$ элемент F_d будет содержать ДПФ полинома f.

Оценим сложность такого способа вычислений.

На шаге $k+1$ для каждого набора $j_1, \dots j_{k+1}, i_{k+2}, \dots i_d$ вычисляется одномерное преобразование Фурье на n_{k+1} точках, используя в качестве входных данных результат вычислений на шаге k. На шаге $k+1$ будет вычислено n/n_{k+1} одномерных преобразований Фурье.

Сложность такого способа вычислений будет выражаться

$$\sum_{k=1}^{d} O(\frac{n}{n_k} n_k \log_2 n_k) = O(n \log_2 n).$$

Аспекты программной реализации многомерного ДПФ и его применение для операций с полиномами будут представлены в докладе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ноден П., Китте К.* Алгебраическая алгоритмика (с упражнениями и решениями). М.: Мир, 1999.

2. *Кнут Д.Э.* Исскуство программирования.Получисленные алгоритмы. М.: Издательский дом «Вильямс»,2001. Т. 2.

3. *Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1296 с.

Abstract: The method of computation of descrete Fourier transform for polynomials of many variables over the ring $Z_p[x_1, x_2, \dots, x_n]$ is considered. Theoretical complexity of the stated approach is provided.
Keywords: computer algebra; descrete Fourier transform; fast Fourier transform; theory of algorithms.

Лапаев Алексей Олегович
аспирант
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: alapaev@gmail.com

Alexei Lapaev
post-graduate student
Tambov State University
named after G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: alapaev@gmail.com

УДК 517.929, 519.71

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **А. С. Ларионов, В. В. Лузгин, В. В. Панасов**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; функция Коши; система автоматического регулирования; устойчивость.

Аннотация: Предлагаются достаточные условия положительности функции Коши и фундаментального решения дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом; эти условия используются для получения признаков устойчивости решений уравнения, описывающего динамику системы автоматического регулирования.

Многие процессы, протекающие в реальных системах, не могут быть адекватно описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями. Все более актуальными в последнее время становятся такие прикладные задачи, в которых требуется учитывать одно из фундаментальных свойств любых реальных систем и объектов – запаздывание. Запаздывание обусловлено как необходимостью передачи сигнала, энергии или вещества во времени, так и тем обстоятельством, что на сбор и обработку информации, а также на принятие решений, например в системах автоматического регулирования, требуется определенное время [1, 2]. Для математического описания такого рода систем и объектов все большее применение находят дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, являющиеся актуальными представителями класса функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), которые в линейном случае можно записать в виде

$$(\mathcal{L}x)(t) = f(t),\ t \in [a, \infty), \tag{1}$$

где $\mathcal{L} : AC^n \to L^n$— линейный ограниченный оператор (здесь AC^n— банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$, L^n— банахово пространство суммируемых на каждом конечном отрезке $[a, b] \subset [a, \infty)$ функций $z : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$).