Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.98

О собственных числах преобразования Березина [1]

© **А. А. Артемов**

Ключевые слова: канонические представления, псевдо-ортогональная группа, преобразование Березина

Обобщенная группа Лоренца $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ действует на единичной сфере Ω в $\mathbb{R}^n$ (линейно на лучах). Это действие имеет 3 открытых орбиты. Мы находим явные формулы для композиции преобразований Пуассона и преобразования Березина

The generalized Lorentz group $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ acts on the unit sphere Ω in $\mathbb{R}^n$ (linearly on rays). This action has 3 open orbits. We compute explicit formulae for the composition of Poisson s and the Berezin transform

Настоящая работа посвящена одной теме в изучении канонических представлений на G-пространствах, а именно, взаимодействию преобразований Пуассона и сплетающих операторов. В качестве сплетающего оператора мы возьмем преобразование Березина, это самый сложный случай. Указанная тема относится к новой теории в гармоническом анализе: изучению канонических представлений на G-пространствах, – начатой в работах Молчанова [2], [3], [1].

Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, билинейную форму

$$[x, y] = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Пусть $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$. Мы считаем, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, в соответствии с этим мы записываем вектор в виде строки.

Обозначим через $|x|$ евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Пусть Ω – сфера $|x| = 1$. Обозначим через $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ подпространство функций f в $\mathcal{D}(\Omega)$ четности ν.

Канонические представления $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, группы G мы определяем как ограничения представлений максимальной вырожденной серии надгруппы

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, 06-06-96318 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

$\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ на группу G. Представление $R_{\lambda,\nu}$ группы G действует в $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$:

$$\big(R_{\lambda,\nu}(g)f\big)(u) = f\Big(\frac{ug}{|ug|}\Big)\ |ug|^{-\lambda-n}, \quad g \in G.$$

Назовем *преобразованием Березина* оператор $Q_{\lambda,\nu}$, задаваемый формулой

$$\big(Q_{\lambda,\nu}f\big)(u) = c(\lambda,\nu)\ \int_\Omega [u,v]^{\lambda,\nu}\ f(v)\ dv.$$

где dv – евклидова мера, мы используем обозначение $t^{\lambda,\nu} = |t|^\lambda \mathrm{sgn}^\nu$,

$$c(\lambda,\nu) = \frac{1}{2}\ \pi^{(1-n)/2}\ \Gamma\left(\frac{\nu-\lambda}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{-\lambda-n+\nu+1}{2}\right).$$

Он сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $R_{-\lambda-n,\nu}$. Композиция $Q_{-\lambda-n,\nu}\ Q_{\lambda,\nu}$ есть тождественный оператор. Представление $R_{\lambda,\nu}$ и оператор $Q_{\lambda,\nu}$ могут быть продолжены на пространство $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ обобщенных функций на Ω четности ν.

Представления группы G, участвующие в разложении канонических представлений, это представления, связанные с конусом. Возьмем сечение S конуса $[x,x]=0$ плоскостью $x_1 = 1$. Оно есть сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть ds – евклидова мера на S. Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$. Представление T_σ группы G действует на $\mathcal{D}(S)$:

$$\Big(T_\sigma(g)\varphi\Big)(s) = \varphi\Big(\frac{sg}{(sg)_1}\Big)(sg)_1^\sigma.$$

Возьмем на Ω открытые множества $\Omega_+ : [u,u] > 0$ и $\Omega_- : [u,u] < 0$. Действие $u \mapsto ug/|ug|$ группы G на Ω не транзитивно. Оно имеет 3 открытые орбиты: множество Ω_+ – одна орбита, множество Ω_- распадается на две орбиты.

Определим *преобразования Пуассона* $P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}$:

$$\big(P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}\varphi\big)(u) = [u,u]_\pm^{(-\lambda-n-\sigma)/2}\ \int_S [u,s]^{\sigma,\nu}\ \varphi(s)\ ds$$

(мы используем обобщенные функции x_+^λ, x_-^λ на действительной прямой).

Обозначим через $C^\infty_\nu(\Omega_\pm)$ пространство функций $f(u)$ класса C^∞ и четности ν на многообразии $\Omega_\pm$. Преобразование $P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}$ есть оператор $\mathcal{D}(S) \to C^\infty_\nu(\Omega_\pm)$. Он сплетает представления $T_{2-n-\sigma}$ и $R_{\lambda,\nu}$.

Теорема 1.1 *Имеют место следующие формулы:*

$$\begin{aligned}
Q_{\lambda,\nu}\ P^-_{\lambda,\nu,\sigma} &= \Lambda^{--}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^-_{-\lambda-n,\nu,\sigma} + \Lambda^{-+}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^+_{-\lambda-n,\nu,\sigma},\\
Q_{\lambda,\nu}\ P^+_{\lambda,\nu,\sigma} &= \Lambda^{+-}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^-_{-\lambda-n,\nu,\sigma} + \Lambda^{++}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^+_{-\lambda-n,\nu,\sigma}.
\end{aligned}$$

Числа $\Lambda^{\pm\pm}$ образуют матрицу (зависящую от λ,ν,σ):

$$M = \begin{pmatrix} \Lambda^{--} & \Lambda^{-+} \\ \Lambda^{+-} & \Lambda^{++} \end{pmatrix}.$$

Вот ее явное выражение:

$$M(\lambda,\nu,\sigma)=\frac{\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)}{\cos\frac{\lambda-\nu}{2}\pi}\left(\begin{array}{cc}\cos\frac{\lambda+\nu}{2}\pi & \cos\frac{\sigma+\nu}{2}\pi\\ -\cos\frac{\sigma+n-\nu}{2}\pi & -\cos\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi\end{array}\right),$$

где

$$\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)=\frac{\Gamma\left(\frac{-\lambda+\sigma}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{-\lambda-n-\sigma+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\lambda-\nu+1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{-\lambda-n+\nu+1}{2}\right)}.$$

Матрица M есть своего рода "собственное число" преобразования Березина $Q_{\lambda,\nu}$.

Литература

1. В. Ф. Молчанов. Канонические представления на двуполостных гиперболоидах. Записки научных семинаров ПОМИ, 2006, том 331, 91–124.

2. V. F. Molchanov. Canonical and boundary representations on a hyperboloid of one sheet. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 191–204.

3. V. F. Molchanov. Canonical representations on the two-sheeted hyperboloid. Indag. Math., 2005, vol. 16, Nos. 3–4, 609–630.

УДК 519.1

Формула обращения для преобразования Радона на плоскости над конечным кольцом [1]

© Е. В. Водолажская

Ключевые слова: преобразование Радона, конечные поля, кольца классов вычетов

Преобразование Радона R на плоскости над конечным кольцом K сопоставляет функции f на K суммы ее значений по прямым. Мы предлагаем гипотетическую формулу обращения для произвольного кольца. Эта формула доказана для поля.

The Radon transform R on the plane over a finite ring K assigns to a function f on K sums of its values on lines. We write a hypothetic inversion formula. It is proved for a field.

Пусть K – конечное кольцо с q элементами, $K^2 = K \times K$ – плоскость над K. *Прямой* на плоскости K^2 назовем множество ℓ всех точек $(x, y) \in K^2$, удовлетворяющих уравнению:

$$ax + by = c,$$

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_a, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.