

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фомин В.И.* О случае комплексных характеристических операторов линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка в банаховом пространстве // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конф. Воронеж, 2007. С. 231–232.
2. *Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Физматлит, 2002.

Фомин Василий Ильич
Тамбовский государственный
технический ун-т
Россия, Тамбов
e-mail: kulikov@apmath.tstu.ru

Поступила в редакцию 5 мая 2007 г.

ЛОМАННЫЕ ЭЙЛЕРА В СИСТЕМАХ КАРАТЕОДОРИ ¹

© Д. В. Хлопин

Известно [1], что в динамических системах с непрерывной правой частью некоторые решения могут получены как пределы ломаных Эйлера, мелкость разбиений которых стремится к нулю. В случае единственности ломаные Эйлера сходятся к единственному решению, получены при достаточно общем признаке единственности и соответствующие оценки сходимости [2]. Для измеримой правой части исследовались [3] всевозможные пределы последовательностей ломаных Эйлера, вмещающее их дифференциальное включение можно получить также из [4, Теорема 1.1.3].

В данной работе описываются условия, при которых ломаные Эйлера сходятся к пучку решений системы. Используемая для этого в непрерывном случае мелкость разбиений не применима для измеримой правой части. Действительно, можно показать (см. [5]), что в случае измеримой правой части существует такой класс эквивалентных (по Борелю) измеримых функций, для которого, при любой правой части из этого класса эквивалентности, малая мелкость разбиения не гарантирует близость соответствующей ломаной Эйлера к пучку решений системы, даже если все моменты разбиений взяты среди точек Лебега (или моментов непрерывности) правой части.

Вместо мелкости по заданной правой части и компакту содержащему все траектории системы, на множестве всевозможных разбиений отрезка времени строится метрика (множество разбиений оснащалось достаточно сложной топологией, например, в [6]).

Пусть дана удовлетворяющая условиям Каратеодори [7] система

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 06-01-00414, № 07-01-96088).

функционирующая в m -мерном фазовом пространстве $\mathbf{R}^m$ на конечном промежутке $I_0 \triangleq [t_0, T]$ ($t_0 < T$). Пусть $\mathbf{D}$ — всевозможные конечные множества из I_0 со свойством $t_0, T \in I_0$.

Определим для каждого $\Delta \in \mathbf{D} \cup \{I_0\}$ свою функцию «ближайший слева» по правилу:

$$\tau_{\Delta}^*(t) = \max\{\tau \mid \tau \in \Delta, \tau \leq t\}, \quad \forall t \in I_0.$$

Теперь для всякого $\Delta \in \mathbf{D}$ соответствующая ему ломаная Эйлера $\xi_{\Delta} \in C_m(I_0)$ есть единственное решение уравнения:

$$\dot{\xi}_{\Delta} = f(\tau_{\Delta}^*(t), \xi_{\Delta}(\tau_{\Delta}^*(t))), \quad \xi_{\Delta}(t_0) = x_0.$$

Зафиксируем некоторый компакт $\Psi \subset C_m(I_0)$. Введем для правой части системы (1) и компакта Ψ псевдометрику ϱ_{Ψ}^* и метрику ϱ_{Ψ} по правилу: для всех $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbf{D} \cup \{I_0\}$

$$\varrho_{\Psi}^*(\Delta_1, \Delta_2) \triangleq \int_{I_0} \max_{x \in \Psi} \|f(\tau_{\Delta_1}^*(t), x(\tau_{\Delta_1}^*(t))) - f(\tau_{\Delta_2}^*(t), x(\tau_{\Delta_2}^*(t)))\|_m dt,$$

$$\varrho_{\Psi}(\Delta_1, \Delta_2) \triangleq \max(\varrho_{\Psi}^*(\Delta_1, \Delta_2), \max_{t \in I_0} |\tau_{\Delta_1}^*(t) - \tau_{\Delta_2}^*(t)|).$$

Можно показать, что для всех $\varepsilon > 0$ найдется $\Delta \in \mathbf{D}$ со свойством $\varrho_{\Psi}(\Delta, I_0) < \varepsilon$.

Можно заметить, что в случае непрерывной правой части (1) для всякой последовательности $(\Delta_i)_{i \in \mathbf{N}} \in \mathbf{D}^{\mathbf{N}}$ сходимость их мелкости к нулю эквивалентна сходимости последовательности $(\Delta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ (по метрике ϱ_{Ψ}) к I_0 .

Т е о р е м а 1. Пусть для некоторого компакта $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{R}^m$ всякое локальное правостороннее решение системы (1) продолжимо до решения из $\Phi \in C(I_0, \mathbf{K}_0)$, а правая часть системы (1) ограничена на $\mathbf{K}_0$ по модулю некоторой константой. Тогда можно подобрать такой компакт $\Psi \subset C_m(I_0)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для всякого $\Delta \in \mathbf{D}$, $\varrho_{\Psi}(\Delta, I_0) \leq d$ существует некоторое решение $x \in \Phi$ со свойством

$$\|x - \xi_{\Delta}\|_{C_m(I_0)} < \varepsilon.$$

Такой результат имеет место и для неограниченной правой части, но ϱ_{Ψ} строится по вспомогательной к (1) системе, а в качестве Ψ берется $\Psi \subset C_{m+2}(I_0)$.

Т е о р е м а 2. Пусть для некоторого компакта $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{R}^m$ всякое локальное правостороннее решение системы (1) продолжимо до решения из $\Phi \in C(I_0, \mathbf{K}_0)$ и правая часть системы (1) удовлетворяет условию [7, (1.1.18)] (равностепенная непрерывность по фазовой переменной). Тогда можно подобрать такой компакт $\Psi \subset C_{m+2}(I_0)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для всякого $\Delta \in \mathbf{D}$, $\varrho_{\Psi}(\Delta, I_0) \leq d$ существует некоторое решение $x \in \Phi$ со свойством $\|x - \xi_{\Delta}\|_{C_m(I_0)} < \varepsilon$.

Теперь можно перенести [1, упражнение 2.2.1] на случай измеримой правой части.

С л е д с т в и е 1. Если правая часть системы (1) ограничена или удовлетворяет условию [7, (1.1.18)], и $\theta \in [t_0, T]$ таково, что не существует локального решения системы (1), непродолжимого до θ включительно, то существует такая последовательность разбиений $(\Delta_i)_{i \in \mathbf{N}} \in \mathbf{D}^{\mathbf{N}}$, что (равномерный на $[t_0, \eta]$) предел ломаных Эйлера $(\xi_{\Delta_i})_{i \in \mathbf{N}} \in C_m([t_0, \theta])^{\mathbf{N}}$ есть решение системы (1) на $[t_0, \eta]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Казиев Э.А. Односторонние оценки при решении дифференциальных уравнений методом ломаных Эйлера // Известия Академии Наук Азербайджанской ССР, Серия физико-технических и математических наук. 1966. № 1. С. 112–119.
3. Mirc̆a S. Feedback differential systems: approximate and limiting trajectories // Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 2004. V. 49, № 3. P. 83–96.
4. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.
5. Хлопин Д.В. Ломаные Эйлера в системах с измеримой по времени правой частью // Труды 38-й региональной мол. конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург, 29 янв. – 2 февр. 2007 г. Екатеринбург, 2007. С. 394–399.
6. Дружинин Э.И. Обусловленность прямых алгоритмов расчета программных управлений в нелинейных системах // Материалы конф. «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби» (CGS'2005). Екатеринбург, 22–25 июня 2005 г. Екатеринбург, 2005. С. 59–61.
7. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Хлопин Дмитрий Валерьевич
Институт математики и механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 23 апреля 2007 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ¹

© В. З. Цалюк

Рассматривается функционально-дифференциальная система

$$\dot{x}(t) = \int_0^t d_s A(t, s) x(s) + Bx(t) + f(t). \quad (1)$$

Здесь ядро $A : \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, s) : t \in [0, \infty), s \in [0, t]\} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет стандартному условию (R) [1, 2] и описывает управляемый объект. Член $Bx(t)$ отвечает за действие линейной обратной связи.

Кроме того,

$$\exists \delta_A > 0 : A(t, s) = 0 \text{ при } s < t - \delta_A,$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 03-01-00255 и № 06-01-00744).