УДК 984.030.22

ИСТОРИЯ СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ОБОБЩЕННЫМИ МЕТОДАМИ. МЕТОДИКА РАЗЛОЖЕНИЯ БИНОМА НЬЮТОНА В СТЕПЕННОЙ РЯД, СХОДЯЩИЙСЯ НА ВСЕЙ ЧИСЛОВОЙ ОСИ

© Е.Е. Алексеева

Alexeeva E.E. History of divergent series summation by the generalized methods. The technique of decomposition of a binomial formula in power series converging on the numerical axis. The history of a problem on divergent series summation by the generalized methods is described in the preamble of the article. The article suggests the technique of an expansion in a series of a binominal formula outside an ordinary interval of convergence (–1, +1). The way of identical transformation of initial binomial function to an aspect is offered, permitting to receive missing branches of decomposition of a binomial series in limens from $-\infty$ up to –1 and from +1 up to $+\infty$.

Процесс развития математики, как и любой другой науки, осуществлялся от простого к сложному. Сначала были выведены формулы для расчета конечных сумм. Они и сегодня имеют большое прикладное значение. После разработки теории пределов появилась возможность вычисления точных сумм сходящихся числовых рядов, которые имеют в своем составе бесконечное число слагаемых. Это был большой шаг вперед в развитии математики. Все математики понимали, что бесконечная сумма собственно расходящегося ряда ∞ не есть число, а сумма неопределенного ряда (хотя бы даже и ограниченного) отсутствует. Известно, что ряд в зоне своей расходимости не воспроизводит функцию, из разложения которой он получен. Это побуждало даже таких великих ученых, как Эйлер, Абель, Пуассон искать так называемые обобщенные способы вычислений сумм рядов, дающих сумму, равную значению функции в этой точке. Так, например, в письме к Гольдбаху (1745 г.) Эйлер рассказывает о довольно сложных выкладках, с помощью которых он нашел, что сумма ряда $1-1!+2!-3!+4!-5!+\ldots$ есть число равное 0,5963475922. К Эйлеру в этом смысле примыкает и Ж. Лагранж, приписывавший (1770 г.) каждому ряду с членами, стремящимися к нулю, т. е. «сходящемуся» в смысле Эйлера, определенную сумму.

Здесь видно, что в термин «сходимость» Эйлер вкладывал другой смысл, отличный от современного. Правда, уже в то время [4] встречались определения сходимости, звучащие совсем по-современному. Так, в одной работе английского математика Варинга (1781 г.) можно прочитать: «Если в $a+b+c+d+e+\ldots$ суммы $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d,\ldots$ стремятся к конечной величине, к которой они подходят ближе, чем любая заданная разность, то ряд сходится». Однако эта работа не была оценена по достоинству и не оказала существенного влияния на развитие теории рядов того времени.

Норвежский математик Н. Абель в своем письме к другу Хольмбое писал: «Расходящиеся ряды, в целом, дьявольское измышление, и это позор, что позволяют основывать на них какое бы то ни было доказательство. Если ими пользоваться, то можно прийти к чему угодно, и это они производят столько затруднений и парадоксов. Можно ли представить себе более отвратительное, чем когда говорят, что

$$0=1-2^n+3^n-4^n+\ldots ,$$

где n – целое положительное число. Ну, разве это не смехотворно?»

Как видно, суждения двух великих математиков относительно суммы расходящегося ряда были прямо противоположны.

Казалось бы, можно понять утверждение Эйлера, что ряд, полученный разложением функции, должен давать при вычислениях тот же результат, что и сама функция. Однако этого не происходит в зоне расходимости ряда.

В то же время можно понять негодование Абеля на очевидную несуразность, когда сумме расходящегося ряда (в современном понимании расходимости) приписывается конечная величина.

Интуитивное утверждение Л. Эйлера о том, что ряд должен воспроизводить значения функции, из которой он получен, во всей области определения функции, так и не нашло своего надлежащего разрешения до настоящего дня.

Для определения сумм расходящихся рядов математики искали способы суммирования этих рядов, позволяющие получить тот же результат, который даст функция $f(x)$, разложением которой этот ряд получен. Естественно, что за истинное значение принималась величина, полученная из непосредственного расчета значения функции $f(x)$, а для расходящегося ряда, полученного ее разложением, придумывалась методика (обобщенная) вычисления суммы, дающая такой же самый результат.

Такое искусственное согласование изначально не согласующихся результатов обставляется рядом требований, которые позволяют назвать методику обобщенной.

Первое требование состояло в том, чтобы обобщенное понятие суммы включало в себя обычное понятие суммы. Это означает, что ряд, сходящийся в обычном смысле слова и имеющий обычную сумму S, должен иметь обобщенную сумму, и притом так же равную S. Метод суммирования, обладающий указанным свойством, называется регулярным.

Второе требование к обобщенной сумме состоит в том, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ имеет обобщенную сумму U, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ имеет обобщенную сумму V, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (Au_k + Bv_k)$, где A и B – любые постоянные, имеет обобщенную сумму $(AU + BV)$. Метод, удовлетворяющий указанному условию, называют линейным. В анализе и его приложениях, как правило, имеют дело лишь с регулярными линейными методами суммирования.

Такие методы были разработаны Эйлером, Пуассоном, Абелем, Гельдером, Вороным, Борелем, Фробениусом, развившим метод Чезаро, и др.

Во всех этих методиках полученная обобщенная сумма ряда, если ее удается получить, имеет особый смысл, отличный от обычного. Это всегда подчеркивается при вычислении сумм расходящихся рядов. Здесь можно подчеркнуть, что таких «особых смыслов» может существовать неограниченное количество, в отличие от обычного смысла, который всегда остается одним и тем же. Видимо, «обычный смысл», не позволяющий суммировать расходящиеся ряды, в отличие от всех остальных, и является тем самым смыслом, который мы привыкли называть здравым смыслом. Любой «особый смысл» – это частность, а не обобщение, потому он и «особый».

Оценивая цель и способы многочисленных методик суммирования расходящихся рядов, можно заметить, что все это в обычном смысле слова похоже на подгонку неразрешимой задачи под заранее известный ответ (из выражения самой функции).

Все названные методики можно применять и к биномиальному разложению в ряд за пределами сходимости этого ряда. Однако в этих случаях всегда встает вопрос об адекватности полученных результатов в обычном смысле слова. Без доказательства адекватности цена полученных результатов, как правило, невысока. Все это указывает на исключительную важность решения задачи суммирования расходящегося ряда в обычном смысле слова.

Очевидно, что бином Ньютона – это одна из самых фундаментальных алгебраических функций, порождающих ряды. Перейдя в известных к тому времени биномах от целых положительных степеней к дробным и отрицательным, Ньютон совершил шаг исключительной важности. Он позволил ввести в математический оборот целый класс рядов, названных его именем. Роль этого открытия в современной математике невозможно переоценить. Формула разложения бинома Ньютона в бесконечный ряд [1] имеет вид:

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \ldots + (\pm 1)^r \frac{n! x^r}{(n-r)! r!} + \ldots \qquad (1)$$

Коэффициенты при x^r этом выражении представляют собой число сочетаний из n элементов по r и называются биномиальными коэффициентами C_n^r. Если показатель степени n является целым положительным числом, то выражение бинома состоит из конечного числа членов, равного $(n+1)$. К примеру:

$$(1 \pm x)^1 = 1 \pm x$$
$$(1 \pm x)^2 = 1 \pm 2x + x^2$$
$$(1 \pm x)^3 = 1 \pm 3x + 3x^2 \pm x^3$$
$$(1 \pm x)^4 = 1 \pm 4x + 6x^2 \pm 4x^3 + x^4$$
$$(1 \pm x)^5 = 1 \pm 5x + 10x^2 \pm 10x^3 + 5x^4 \pm x^5$$

Если же показатель степени n не является целым положительным числом, то ряд всегда является бесконечным. При $|x| < 1$ такой ряд сходится, при том, если $n > 0$, то ряд сходится при $|x| \leq 1$.

Сходимость ряда, полученного разложением бинома Ньютона, показывает даже самый слабый признак сходимости рядов – признак Даламбера.

Если показатель степени бинома Ньютона отрицательный $(-n)$, то выражение бинома приобретает вид:

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} + \ldots + (\mp 1)^r \frac{(n+r-1)x^r}{(n-1)! r!} + \ldots \qquad (2)$$

Разложения бинома Ньютона рассчитываются по приведенным формулам (1) и (2) для любых показателей степеней n в виде положительных и отрицательных рациональных дробей. Для наиболее часто употребляемых дробных и отрицательных показателей степени n эти разложения приводятся, например, в [1] имеют вид:

1. $(1 \pm x)^{1/4} = 1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8}x^2 \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \pm \ldots \quad |x| \leq 1$
2. $(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6}x^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \pm \ldots \quad |x| \leq 1$
3. $(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \ldots \quad |x| \leq 1$
4. $(1 \pm x)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots \quad |x| \leq 1$
5. $(1 \pm x)^{5/2} = 1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \ldots \quad |x| \leq 1$
6. $(1 \pm x)^{\ 1/4} = 1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}x^2 \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}x^3 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}x^4 \mp \ldots |x| \prec 1$
7. $(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}x^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12}x^4 \mp \ldots \quad |x| \prec 1$ (3)
8. $(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots \quad |x| \prec 1$
9. $(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots \quad |x| \prec 1$
10. $(1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots \quad |x| \prec 1$
11. $(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \ldots \quad |x| \prec 1$
12. $(1 \pm x)^{-5/2} = 1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \mp \ldots \quad |x| \prec 1$
13. $(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2}\left(2 \cdot 3x \mp 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 \mp 5 \cdot 6x^4 + \ldots\right) \quad |x| \prec 1$
14. $(1 \pm x)^{-4} = 1 \mp \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(2 \cdot 3 \cdot 4x \mp 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 \mp \ldots\right) \quad |x| \prec 1$

Ограничения по использованию этих формул показывают, что при положительном показателе степени n они применимы в интервале сходимости $|x| \le 1$. При отрицательных показателях степени n они применимы в интервале сходимости $|x| < 1$.

Сходимость рядов Ньютона в пределах изменения x от -1 до $+1$ существенно ограничивает сферу их применения, и современная математика ничего не может предложить на этот счет.

Суммирование расходящегося ряда в обычном смысле слова. Для решения задачи суммирования расходящегося ряда в обычном смысле, прежде всего, необходимо обратиться к анализу функции, из которой получен ряд. Любая функция путем тождественных преобразований может быть записана в другой форме. Суть поставленной задачи состоит в том, чтобы другая (тождественная) форма записи исходной функции приводила к возможности разложения ее в ряд, сходящийся за пределами обычной сходимости ряда. Применительно к биному Ньютона такая операция выглядит следующим образом:

$$(1 \pm x)^n = \left[(\pm x)\cdot\left(\pm\frac{1}{x}+1\right)\right]^n = (\pm)x^n\cdot\left(1\pm\frac{1}{x}\right)^n. \tag{4}$$

В преобразованном выражении (4) в скобках заключен тоже бином Ньютона, но уже в другой записи. Разложение в ряд нового бинома дает:

$$\begin{aligned}(1 \pm x)^n &= (\pm x)^n\left(1\pm\frac{1}{x}\right)^n = \\ &= (\pm x)^n\cdot\left[1\pm\frac{n}{x}+\frac{n(n-1)}{2!\,x^2}\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,x^3}+\right. \\ &\qquad\left. +\ldots+(\pm 1)^r\frac{n!}{(n-r)!\,r!\,x^r}+\ldots\right]\end{aligned} \tag{5}$$

Бесконечный ряд в квадратных скобках последнего выражения сходится в пределах $|x| > 1$, а при $n < 0$ он сходится в пределах $|x| \ge 1$. На основании формулы (5) все вышеприведенные разложения бинома Ньютона (3) могут быть тождественно преобразованы к виду:

$$\begin{aligned}
&1.\ (1\pm x)^{1/4} = (\pm x)^{1/4}\left[1\pm\frac{1}{4x}-\frac{1\cdot3}{4\cdot8x^2}\pm\frac{1\cdot3\cdot7}{4\cdot8\cdot12x^3}-\frac{1\cdot3\cdot7\cdot11}{4\cdot8\cdot12\cdot16x^4}\pm\ldots\right] && |x|\ge1\\
&2.\ (1\pm x)^{1/3} = (\pm x)^{1/3}\left[1\pm\frac{1}{3x}-\frac{1\cdot2}{3\cdot6x^2}\pm\frac{1\cdot2\cdot5}{3\cdot6\cdot9x^3}-\frac{1\cdot2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9\cdot12x^4}\pm\ldots\right] && |x|\ge1\\
&3.\ (1\pm x)^{1/2} = (\pm x)^{1/2}\left[1\pm\frac{1}{2x}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4x^2}\pm\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6x^3}-\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8x^4}\pm\ldots\right] && |x|\ge1\\
&4.\ (1\pm x)^{3/2} = (\pm x)^{3/2}\left[1\pm\frac{3}{2x}+\frac{3\cdot1}{2\cdot4x^2}\mp\frac{3\cdot1\cdot1}{2\cdot4\cdot6x^3}-\frac{3\cdot1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot8x^4}\pm\ldots\right] && |x|\ge1\\
&5.\ (1\pm x)^{5/2} = (\pm x)^{5/2}\left[1\pm\frac{5}{2x}+\frac{5\cdot3}{2\cdot4x^2}\pm\frac{5\cdot3\cdot1}{2\cdot4\cdot6x^3}+\frac{5\cdot3\cdot1\cdot1}{2\cdot4\cdot6\cdot8x^4}\pm\ldots\right] && |x|\ge1\\
&6.\ (1\pm x)^{-1/4} = (\pm x)^{-1/4}\left[1\mp\frac{1}{4x}+\frac{1\cdot5}{4\cdot8x^2}\mp\frac{1\cdot5\cdot9}{4\cdot8\cdot12x^3}+\ldots\right] && |x|\succ1\\
&7.\ (1\pm x)^{-1/3} = (\pm x)^{-1/3}\left[1\mp\frac{1}{3x}+\frac{1\cdot4}{3\cdot6x^2}\mp\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9x^3}+\ldots\right] && |x|\succ1\\
&8.\ (1\pm x)^{-1/2} = (\pm x)^{-1/2}\left[1\mp\frac{1}{2x}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4x^2}\mp\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6x^3}+\ldots\right] && |x|\succ1\\
&9.\ (1\pm x)^{-1} = (\pm x)^{-1}\left[1\mp\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\mp\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\mp\frac{1}{x^5}\ldots\right] && |x|\succ1\\
&10.\ (1\pm x)^{-3/2} = (\pm x)^{-3/2}\left[1\mp\frac{3}{2x}+\frac{3\cdot5}{2\cdot4x^2}\mp\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6x^3}+\ldots\right] && |x|\succ1\\
&11.\ (1\pm x)^{-2} = (\pm x)^{-2}\left[1\mp\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\mp\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^4}\mp\ldots\right] && |x|\succ1\\
&12.\ (1\pm x)^{-5/2} = (\pm x)^{-5/2}\left[1\mp\frac{5}{2x}+\frac{5\cdot7}{2\cdot4x^2}\mp\frac{5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6x^3}+\ldots\right] && |x|\succ1\\
&13.\ (1\pm x)^{-3} = (\pm x)^{-3}\left[1\mp\frac{1}{1\cdot2}\left(\frac{2\cdot3}{x}\mp\frac{3\cdot4}{x^2}+\frac{4\cdot5}{x^3}\mp\frac{5\cdot6}{x^4}+\ldots\right)\right] && |x|\succ1\\
&14.\ (1\pm x)^{-4} = (\pm x)^{-4}\left[1\mp\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{2\cdot3\cdot4}{x}\mp\frac{3\cdot4\cdot5}{x^2}+\frac{4\cdot5\cdot6}{x^3}\mp\ldots\right)\right] && |x|\succ1
\end{aligned} \tag{6}$$

Суть произведенных преобразований бинома Ньютона к ряду, сходящемуся в бесконечных пределах, хорошо видна из последних формул (6). В квадратных скобках каждого разложения стоит ряд абсолютно того же содержания, что и соответствующий ряд в выражениях (3). Однако вместо аргумента x (как было в выражениях (3)) в выражениях (6) стоит обратная ему величина $\frac{1}{x}$, что и делает последний ряд сходящимся. Перед квадратными скобками каждого ряда в выражениях (6) стоит множитель вида x^n, который можно условно назвать масштабирующим множителем. Этот масштабирующий множитель как бы компенсирует влияние перехода в квадратных скобках от аргумента x к его обратной величине.

Показанные действия представляют собой не что иное, как преобразование исходной функции $f(x)$ к произведению двух функций вида: $f(x) = k(x)\cdot F\left(\frac{1}{x}\right)$.

Последняя функция $F\left(\frac{1}{x}\right)$ и позволяет путем разложения перейти к сходящемуся ряду-эквиваленту.

В качестве замечания можно отметить, что выражение бинома Ньютона при дробном показателе степени n, например, $\frac{1}{4}$, имеет 4 численных значения, соответственно числу корней. Однако разложение бинома в этом случае, представленное правой частью выражения (3), при $|x| < 1$ является справедливым лишь для одного арифметического значения корня.

При $|x| > 1$ соответствующее разложение бинома в сходящийся ряд-эквивалент, характеризующийся выражением (5), даст четыре равноправных разложения. Это происходит из-за наличия у масштабирующего множителя такого же самого количества корней.

Таким образом, показанные примеры преобразования расходящихся рядов к рядам сходящимся дают основание для того, чтобы вернуться, наконец, в лоно поиска математических истин в самом обычном здравом смысле, а не в неисчислимых, так называемых, обобщенных смыслах.

Здесь следует заметить, что разнообразные степени бинома Ньютона фигурируют в качестве первообразных функций, интегрирование которых дает алгебраические функции, логарифмические, обратные тригонометрические и обратные гиперболические. Это, в свою очередь, показывает наличие широких возможностей у предложенных преобразований. Они позволяют решать проблемы разложений широкого класса функций в степенные ряды, сходящиеся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеева Е.Е., Лушников Е.М.* Проблемы и решения в теории рядов. Калининград: Изд-во «Янтарный сказ», 2004. 256 с.
2. *Власова Е.А.* Ряды. Вып. 9. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 612 с.
3. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. 6-е изд., стереотип. СПб.: Изд-во «Лань», 2002. 408 с.
4. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
5. *Маркушевич А.И.* Ряды. М.: Наука, 1979. 190 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2001. 864 с.

Поступила в редакцию 15 июня 2006 г.