УДК 517.98

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА НА СФЕРЕ

© **А. А. Артемов**

Ключевые слова: канонические представления; псевдо-ортогональная группа; преобразование Березина.

Аннотация: Обобщенная группа Лоренца $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ действует на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ с надгруппой $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Это действие имеет 3 открытых орбиты. Мы разлагаем на неприводимые компоненты канонические представления $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, группы G и разлагаем сопутствующую форму Березина.

Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, билинейную форму

$$[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Группа $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ сохраняет эту форму. В качестве надгруппы для G мы возьмем группу $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Обозначим через $|x|$ евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Пусть Ω – сфера $|x| = 1$, пусть S – сечение конуса $[x, x] = 0$ плоскостью $x_1 = 1$, оно есть сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$. Обозначим через $\langle f, h\rangle_\Omega$ и $\langle \psi, \varphi\rangle_S$ скалярные произведения по евклидовым мерам du и ds на Ω и S, соответственно.

Канонические представления $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, группы G мы определяем как ограничения представлений максимальной вырожденной серии надгруппы $\widetilde{G}$ на группу G. Они действуют в пространстве $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ функций на Ω класса C^∞ и четности ν:

$$\big(R_{\lambda,\nu}(g)f\big)(u) = f\Big(\frac{ug}{|ug|}\Big)\ |ug|^{-\lambda-n}, \quad g \in G.$$

Преобразованием Березина назовем оператор $Q_{\lambda,\nu}$ в $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$, задаваемый формулой

$$\big(Q_{\lambda,\nu}f\big)(u) = c(\lambda, \nu)\ \int_\Omega [u, v]^{\lambda,\nu}\ f(v)\ dv,$$

где $c(\lambda, \nu)$ – некоторый множитель, мы используем обозначение $t^{\lambda,\nu} = |t|^\lambda \mathrm{sgn}^\nu t$. Он сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $R_{-\lambda-n,\nu}$. Композиция $Q_{-\lambda-n,\nu}\, Q_{\lambda,\nu}$ есть тождественный оператор. Представление $R_{\lambda,\nu}$ и оператор $Q_{\lambda,\nu}$ могут быть продолжены на пространство $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ обобщенных функций на Ω четности ν. Назовем *формой Березина* полуторалинейную форму $(f, h)_{\lambda,\nu} = \langle Q_{\lambda,\nu}f, h\rangle_\Omega$.

Представления T_σ, $\sigma \in \mathbb{C}$, группы G, участвующие в разложении канонических представлений, действуют в пространстве $\mathcal{D}(S) = C^\infty(S)$:

$$\Big(T_\sigma(g)\varphi\Big)(s) = \varphi\Big(\frac{sg}{(sg)_1}\Big)(sg)_1^\sigma.$$

Обозначим $\Omega_\pm = \{\pm[u, u] > 0\}$. Действие $u \mapsto ug/|ug|$ группы G на Ω не транзитивно. Оно имеет 3 открытые орбиты: Ω_+ и $\Omega_- \cap \{\pm u_1 > 0\}$.

Определим преобразования Пуассона и Фурье:

$$\begin{aligned}\big(P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}\varphi\big)(u) &= [u, u]_\pm^{(-\lambda-n-\sigma)/2} \int_S [u, s]^{\sigma,\nu}\varphi(s)\ ds,\\ \big(F^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}f\big)(s) &= \int_\Omega [u, u]_\pm^{(\lambda-\sigma)/2}\ [u, s]^{\sigma,\nu}\ f(u)\ du.\end{aligned}$$

Эти преобразования сплетают $T_{2-n-\sigma}$ с $R_{\lambda,\nu}$ и $R_{\lambda,\nu}$ с T_σ, соответственно. Имеет место следующая формула:

$$Q_{\lambda,\nu}\ P^{\alpha}_{\lambda,\nu,\sigma} = \sum_{\beta} \Lambda^{\alpha\beta}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^{\beta}_{-\lambda-n,\nu,\sigma},$$

где $\alpha,\beta \in \{-,+\}$. Матрица $\Lambda = (\Lambda^{\alpha,\beta})$ есть своего рода "собственное число" преобразования Березина.

Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ порождает два представления L_λ и M_λ, связанных с границей $\Omega_0 = \{[u,u]=0\}$ открытых орбит. Первое из них действует в пространстве $\Sigma(\Omega)$ обобщенных функций четности ν, сосредоточенных на Ω_0. Обозначим через $\Sigma_k(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}$, его подпространство, натянутое на $\delta^{(m)}(a)$, $a=[u,u]$, $m=0,1,\ldots,k$. Второе – в многочленах Тейлора (струях) от a функций $f\in\mathcal{D}_\nu(\Omega)$. Обозначим через c_m и c_m^* коэффициенты Тейлора функций $f(u)$ и $(1+a)^{(n-3)/2}\ (1-a)^{-1/2}\ f(u)$. Это – функции из $\mathcal{D}(S)$.

Преобразования Пуассона и Фурье мероморфно зависят от σ, их полюсы располагаются соответственно в точках $\lambda-2k$, $2-n-\lambda+2l$ и $-\lambda-n-2k$, $\lambda+2+2l$, где $k,l\in\mathbb{N}$. Полюсы простые, если пары последовательностей не пересекаются.

Пусть λ – общего положения. Вычеты $\widehat{P}^{\pm}_{\lambda,\nu,\mu}$ преобразования Пуассона в полюсах μ являются операторами, действующими из $\mathcal{D}_\nu(S)$ в $\Sigma(\Omega)$. Например, $\widehat{P}^{\pm}_{\lambda,\nu,\lambda-2k}(\varphi)$ с точностью до множителя есть

$$\xi_{\lambda,k}(\varphi) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{k!}{(k-r)!}\ W_{\lambda-2k,r}(\varphi)\ \delta^{(k-r)}(a),$$

где $W_{\sigma,m}$ – некоторые дифференциальные операторы (многочлены от оператора Лапласа-Бельтрами Δ_S на S степени m); в частности, $\xi_{\lambda,0}(\varphi)=\varphi\delta(a)$. Он сплетает представление $T_{2-n-\lambda+2k}$ с представлением L_λ.

Вычеты $\widehat{F}^{\pm}_{\lambda,\nu,\mu}$ преобразования Фурье являются граничными операторами. Например, $\widehat{F}^{\pm}_{\lambda,\nu,-\lambda-n-2k}(\varphi)$ есть с точностью до множителя оператор

$$b_{\lambda,k}(f) = \sum_{r=0}^{k}\ W_{-\lambda-n-2k,r}(c^*_{k-r}).$$

Для λ общего положения граничные представления L_λ и M_λ диагонализуемы с помощью операторов $\xi_{\lambda,k}$ и $b_{\lambda,k}$, соответственно.

Разложение канонических представлений проведем для общего случая: λ лежит в полосах $I_k : (-n-2)/2 < \mathrm{Re}\,\lambda - 2k < (2-n)/2$, $k\in\mathbb{Z}$.

При $\lambda\in I_0$ формула обращения и формула Планшереля для формы Березина получаются складыванием соответствующих формул для гиперболоидов $[x,x]=1$ и $[x,x]=-1$ (с мерами Планшереля ω), а именно,

$$\begin{aligned} f &= \int \omega(\sigma)\ \left\{P^-{}_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}\ F^-{}_{\lambda,\nu,\sigma} f + P^+{}_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}\ F^+{}_{\lambda,\nu,\sigma} f\right\}\, d\rho\, + \\ &+ \sum \omega_r^{(d)}\ \widetilde{P}^+{}_{\lambda,\nu,2-n-r}\ \widetilde{F}^+{}_{\lambda,\nu,r} f, \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} (f,h)_{\lambda,\nu} &= \int \omega(\sigma) \sum_{\alpha,\beta} \Lambda^{\alpha,\beta}(\lambda,\nu,2-n-\sigma)\ \langle F^{\alpha}_{\lambda,\nu,\sigma} f,\ F^{\beta}_{\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\sigma}} h\rangle_S\ d\rho\, + \\ &+ \sum \omega_r^{(d)}\ \Lambda^{++}(\lambda,\nu,2-n-r)\ \langle \widetilde{F}^+{}_{\lambda,\nu,r} f,\ \widetilde{F}^+{}_{\overline{\lambda},\nu,2-n-r} h\rangle_S, \end{aligned} \qquad (2)$$

где интегралы берутся по $\rho\in\mathbb{R}$ с $\sigma=(2-n)/2+i\rho$, суммирование ведется по целым $r>(2-n)/2$ таким, что $r\equiv\nu+1 \pmod 2$, волна означает некоторую нормализацию, $\alpha,\beta\in\{-,+\}$.

Для λ из полосы I_{k+1}, $k \in \mathbb{N}$, мы продолжаем разложения (1) и (2) аналитически по λ в эту полосу. При этом полюсы $\sigma = \lambda - 2m$ и $\sigma = 2 - n - \lambda + 2m$, $m = 0, 1, ..., k$, подинтегрального выражения пересекают линию интегрирования – прямую $\operatorname{Re}\sigma = (2-n)/2$ – и дают $k+1$ дополнительных слагаемых в правых частях. Мы получим:

$$f = \int + \sum + \sum_{m=0}^{k} \pi_{\lambda,\nu,m}(f), \tag{3}$$

где интеграл и ряд означают то же, что и в (1), и

$$\pi_{\lambda,\nu,m}(f) = -4\pi\ \omega(\lambda - 2m)\ \sum_{\alpha} \big\{ \widehat{P}^{\alpha}_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+2m} F^{\alpha}_{\lambda,\nu,\lambda-2m} f \big\},$$

операторы $\pi_{\lambda,\nu,m}$ проектируют на пространства $\Sigma_m(\Omega)$ и ортогональны относительно формы Березина. Продолжение формулы (2) есть "теорема Пифагора" для разложения (3).

Итак, для λ из полосы I_{k+1}, $k \in \mathbb{N}$, к пространству $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ нужно добавить пространство $\Sigma_k^{(\nu)}(\Omega)$. На этом пространстве представление $R_{\lambda,\nu}$ раскладывается в сумму двух слагаемых: первое разлагается как $R_{\lambda,\nu}$ для полосы I_0, второе разлагается в сумму $k+1$ неприводимых представлений $T_{2-n-\lambda+2m}$, $m = 0, 1, ..., k$. Имеет место формула обращения (3) и формула Планшереля для формы Березина.

Для λ из полосы I_{-k-1}, $k \in \mathbb{N}$, мы продолжаем разложения (1) и (2) аналитически по λ в эту полосу. Здесь полюсы $\sigma = \lambda + 2 + 2m$ и $\sigma = -\lambda - n - 2m$, $m = 0, 1, ..., k$, подинтегральной функции (это – полюсы преобразований Фурье $F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}$) дают добавочные слагаемые в правой части:

$$f = \int + \sum + \sum_{m=0}^{k} \Pi_{\lambda,\nu,m}(f), \tag{4}$$

где интеграл и ряд означают то же, что и в (1), и

$$\Pi_{\lambda,\nu,m}(f) = -4\pi\ \omega(\lambda + 2 + 2m)\ \sum_{\alpha} P^{\alpha}_{\lambda,\nu,-\lambda-n-2m} \widehat{F}^{\alpha}_{\lambda,\nu,\lambda+2+2m} f,$$

операторы $\Pi_{\lambda,\nu,m}$, $m \leqslant k$, – проекционные, ортогональные относительно формы Березина. Их можно распространить на пространство $\mathcal{T}_\nu^k(\Omega)$, состоящее из функций f класса C^∞ на каждой G-орбите и четности ν и имеющих разложение Тейлора порядка k: $f(u) = c_0 + c_1 a + \cdots + c_k a^k + o(a^k)$.

При продолжении разложения (2) указанные выше полюсы подинтегральной функции оказываются полюсами обоих преобразований Фурье, так что каждое из четырех слагаемых ($\alpha, \beta \in \{+,-\}$) имеет полюс второго порядка. К счастью, вся сумма этих четырех слагаемых имеет полюс только первого порядка (старшие лорановские коэффициенты взаимно уничтожаются) и вычет получается в обозримом виде. Продолжение формулы (2) есть "теорема Пифагора" для разложения (4).

Таким образом, для λ из полосы I_{-k-1}, $k \in \mathbb{N}$, представление $R_{\lambda,\nu}$, рассматриваемое на пространстве $\mathcal{T}_k^\nu(\Omega)$, распадается на сумму двух слагаемых. Первое действует на подпространстве функций, для которых их коэффициенты Тейлора c_m равны нулю для $m \leqslant k$, и разлагается как представление $R_{\lambda,\nu}$ для полосы I_0, второе разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $T_{-\lambda-n-2m}$, $m \leqslant k$. Имеет место формула обращения (4) и "формула Планшереля" для формы Березина.

Abstract: The generalized Lorentz group $G = \mathrm{SO}_0(1, n{-}1)$ acts on the unit sphere in $\mathbb{R}^n$ with an overgroup $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. This action has 3 open orbits. We decompose the canonical representations $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, of the group G into irreducible constituents and decompose the accompanying Berezin form.

Key words: canonical representations; pseudo-orthogonal group; Berezin transform.

Артемов Анатолий Анатольевич
к. ф.-м. н., доцент,
начальник управления
методологического обеспечения
основной деятельности университета
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

Anatoliy Artyomov
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

УДК 519.85

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАТРИЦЫ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОМ КЛАСТЕРЕ [1]

© А. А. Бетин

Ключевые слова: параллельный рекурсивный алгоритм; присоединенная матрица; детерминантные тождества.

Аннотация: Предлагается параллельный рекурсивный алгоритм вычисления присоединенной матрицы. Приводятся результаты экспериментов на кластере МСЦ при различных размерах, плотности матриц для различного числа процессоров.

Задача обращения плотных и разреженных матриц – одна из самых распространенных задач параллельного программирования. Однако с ростом размеров матриц накопление ошибок тоже растет, и для некоторых задач эта проблема становится катастрофической.

Мощности параллельных вычислительных систем позволяют сегодня подойти к проблеме накопления ошибок с другой стороны. Можно строить параллельный алгоритм с точными вычислениями. Также как в числовых параллельных алгоритмах, преимущество будет у блочных, рекурсивных алгоритмов, в которых не требуется выборка ведущего элемента на каждом шаге.

Алгоритм вычисления присоединенной матрицы основан на разложении на множители обратной матрицы. Если $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ – обратимая матрица и A ее обратимый блок, то можно разложить на множители ее обратную матрицу $\mathcal{A}^{-1}$ [1]:

$$\begin{bmatrix} (I & -A^{-1}C \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (D-BA^{-1}C)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Применение детерминантных тождеств позволяет вычислять присоединенную матрицу с помощью аналогичного разложения присоединенной матрицы [2].

[1] Работа выполнена при поддержке программы "Развитие потенциала высшей школы"(проект 2.1.1/1853) и Темплана 1.12.09.